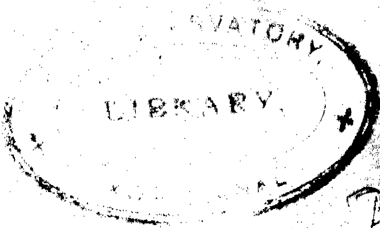

VATORY
LIBRARY

EXERCICES
ASTRONOMIQUES

EXERCICES

ASTRONOMIQUES

A L'USAGE DES ÉLÈVES

DES FACULTÉS ET DES OBSERVATOIRES

PAR

L.-J. GRUEY

PROFESSEUR D'ASTRONOMIE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BESANÇON,
DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE,
DOYEN HONORAIRE.



PARIS

A. HERMANN, LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE

8 — rue de la Sorbonne — 8

1889



INTRODUCTION

Sous le titre : *Exercices astronomiques,* je réunis une série de problèmes et quelques développements théoriques ou pratiques, pour compléter le *Cours d'Astronomie* que j'ai publié dernièrement.

L'ordre des questions est celui dans lequel je les ai proposées à mes élèves, c'est-à-dire l'ordre même du cours auquel je renvoie le lecteur à chaque instant.

L'un des aides astronomes de l'observatoire de Besançon, M. Lebeuf, et l'un des élèves de la Faculté des sciences, M. Contejean, auxquels j'ai confié mon manuscrit, ont bien voulu en vérifier les formules, faire quelques calculs numériques et se charger des soins minutieux de l'impression. Je leur adresse ici mes sincères remerciements.

Ces exercices sont destinés aux auditeurs des Facultés, aux aides et assistants des observatoires, à tous les étudiants qui désirent essayer leurs premières connaissances astronomiques en résolvant des questions analogues dont le nombre paraît illimité.

Pour ne pas étendre inutilement ce recueil, nous avons dû nous borner à quelques exemples, dont le choix n'est sans doute pas irréprochable, et renoncer presque toujours

aux applications purement numériques qu'il eût été facile de multiplier dans les divers genres.

Sans prétendre au même succès, nous avons essayé, dans des proportions plus modestes, de faire pour les cours d'astronomie ce qui est fait, depuis longtemps déjà, pour ceux d'analyse et de mécanique, dans les recueils si estimés de MM. Frenet, Tisserand, Julien, Saint-Germain. Peut-être avons-nous manqué le but; mais si nous avons réussi seulement à le montrer, nous serons heureux; car d'autres, plus habiles, sauront bien l'atteindre et combler une lacune regrettable dans notre enseignement supérieur.

EXERCICES

ASTRONOMIQUES

LIVRE I

MÉTHODES GÉNÉRALES DE CALCUL

CHAPITRE I

Trigonométrie sphérique

1er Exercice.

Des formules fondamentales, premier type (n° 4 du COURS),

$$(1)\qquad \begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B, \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C, \end{cases}$$

déduire les trois autres types.

Solution : 1° Pour avoir la première formule du *deuxième type,* c'est-à-dire la relation entre a, b, A, B, il suffit d'éliminer $\sin c$, $\cos c$ entre les deux premières équations (1), indépendantes de C, de la forme

$$m \sin c + n \cos c = p,$$
$$m' \sin c + n' \cos c = p',$$

et l'identité

$$\sin^2 c + \cos^2 c = 1.$$

Il est encore plus simple d'ajouter et de retrancher membre à membre ces deux équations (1), ce qui donne

$$(2)\qquad \begin{cases} (\cos a + \cos b)(1 - \cos c) = \sin c (\sin b \cos A + \sin a \cos B), \\ (\cos a - \cos b)(1 + \cos c) = \sin c (\sin b \cos A - \sin a \cos B), \end{cases}$$

puis de multiplier les équations (2). On obtient en effet

$$(\cos^2 a - \cos^2 b)\sin^2 c = \sin^2 c\,(\sin^2 b\cos^2 A - \sin^2 a\cos^2 B),$$

ou

$$\sin^2 b - \sin^2 a = \sin^2 b\cos^2 A - \sin^2 a\cos^2 B,$$

c'est-à-dire, si on se borne aux triangles dont les côtés et les angles sont plus petits que 180°,

$$\sin b\sin A = \sin a\sin B.$$

On arriverait de même aux deux autres formules du deuxième type.

2° La première formule du *troisième type* est une relation entre a, b, A, C. On l'aura en éliminant $\sin c$, $\cos c$ entre la première, la troisième équation (1), et l'identité $\sin^2 c + \cos^2 c = 1$. Il sera plus court de remplacer, dans la première équation (1), $\cos c$ par sa valeur tirée de la troisième, ce qui donne successivement :

$$\begin{aligned}
\cos a &= \cos a\cos^2 b + \sin a\sin b\cos b\cos C + \sin b\sin c\cos A,\\
\cos a\sin^2 b &= \ldots\ldots\ldots + \sin a\sin b\cos b\cos C + \sin b\sin c\cos A,\\
\cos a\sin b &= \sin a\cos b\cos C + \sin c\cos A,\\
\cot a.\sin b &= \cos b\cos C + \frac{\sin c}{\sin a}\cdot\cos A,\\
\cot a\sin b &= \cos b\cos C + \sin C\cot A.
\end{aligned}$$

3° La première formule du *dernier type* est une relation entre a, A, B, C. On l'obtiendra en éliminant b, c, entre les équations (1).

Dans la première et la deuxième de ces équations, je remplace $\cos c$ par sa valeur tirée de la troisième. J'ai ainsi, d'après 2°,

$$\begin{aligned}
\cos a\sin b &= \sin a\cos b\cos C + \sin c\cos A,\\
\cos b\sin a &= \sin b\cos a\cos C + \sin c\cos B,
\end{aligned}$$

ou, en remplaçant $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$ par les quantités proportionnelles $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$,

$$\begin{aligned}
\cos a\sin B &= \sin A\cos b\cos C + \sin C\cos A,\\
\cos b\sin A &= \sin B\cos a\cos C + \sin C\cos B.
\end{aligned}$$

Si, pour éliminer $\cos b$ entre ces dernières relations, on les ajoute

après les avoir multipliées respectivement par 1 et cos C, on a, en réduisant et divisant par sin C,

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

2e Exercice.

Démontrer les deux formules :

$$\sin b \sin c + \cos b \cos c \cos A = \sin B \sin C - \cos B \cos C \cos a,$$
$$\sin^2 a\,(1 + \cos A \cos B \cos C) = \sin^2 A\,(1 - \cos a \cos b \cos c).$$

Solution : On sait que

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$
$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

Si nous ajoutons ces équations après avoir multiplié la première par cos A, la deuxième par — cos a, nous aurons

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \sin b \sin c \cos^2 A + \cos b \cos c \cos A = &-\cos B \cos C \cos a \\ &+ \sin B \sin C \cos^2 a. \end{aligned} \right.$$

Mais on sait aussi que

$$\sin b \sin A = \sin a \sin B,$$
$$\sin c \sin A = \sin a \sin C,$$

d'où

$$(2)\qquad \sin b \sin c \sin^2 A = \sin B \sin C \sin^2 a.$$

Si on ajoute membre à membre les égalités (1) et (2), on obtient la première formule qu'il s'agissait de démontrer et qui nous sera utile plus tard.

La deuxième formule à démontrer se tire immédiatement de la première par la substitution à $\sin b \sin c$ et $\sin B \sin C$ de $\dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\cos A}$ et $\dfrac{\cos A + \cos B \cos C}{\cos a}$, suivie de quelques réductions évidentes.

3e Exercice.

Établir les formules de Delambre, sans s'appuyer sur le premier cas de la résolution des triangles.

Solution : Sachant que

$$(1)\qquad \begin{cases} \sin c \sin A = \sin a \sin C, \\ \sin c \sin B = \sin b \sin C, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C, \\ \sin c \cos B = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C, \end{cases}$$

si on ajoute et retranche les relations (1), on a :

$$\sin \tfrac{1}{2} c \cos \frac{A-B}{2} \cos \tfrac{1}{2} c \sin \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2} \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{C}{2} \cos \frac{a-b}{2},$$

$$\sin \tfrac{1}{2} c \sin \frac{A-B}{2} \cos \tfrac{1}{2} c \cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2} \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{C}{2} \sin \frac{a-b}{2}.$$

Les équations (2) ajoutées donnent

$$\sin \tfrac{1}{2} c \cos \frac{A-B}{2} \cos \tfrac{1}{2} c \cos \frac{A+B}{2} = \sin \tfrac{1}{2} C \sin \frac{a+b}{2} \sin \tfrac{1}{2} C \cos \frac{a+b}{2},$$

formule qui, appliquée au triangle polaire, devient

$$\cos \tfrac{1}{2} c \sin \frac{A+B}{2} \cos \tfrac{1}{2} c \cos \frac{A+B}{2} = \sin \tfrac{1}{2} C \cos \frac{a+b}{2} \cos \tfrac{1}{2} C \cos \frac{a-b}{2}.$$

Posons

$$\alpha = \sin \tfrac{1}{2} C \sin \frac{a+b}{2}, \qquad \alpha' = \sin \tfrac{1}{2} c \cos \frac{A-B}{2},$$

$$\beta = \sin \tfrac{1}{2} C \cos \frac{a+b}{2}, \qquad \beta' = \cos \tfrac{1}{2} c \cos \frac{A+B}{2},$$

$$\gamma = \cos \tfrac{1}{2} C \sin \frac{a-b}{2}, \qquad \gamma' = \sin \tfrac{1}{2} c \sin \frac{A-B}{2},$$

$$\delta = \cos \tfrac{1}{2} C \cos \frac{a-b}{2}, \qquad \delta' = \cos \tfrac{1}{2} c \sin \frac{A+B}{2},$$

les quatre équations précédentes s'écriront

$$\alpha\delta = \alpha'\delta', \quad \beta\gamma = \beta'\gamma', \quad \alpha\beta = \alpha'\beta', \quad \beta\delta = \beta'\delta';$$

d'où l'on tire

$$\alpha^2 = \alpha'^2,$$

et, par suite, α et α' étant toujours positifs dans les triangles dont les éléments sont plus petits que 180,

$$\alpha = \alpha',$$

ce qui entraîne

$$\beta = \beta', \quad \gamma = \gamma', \quad \delta = \delta',$$

ou les formules de Delambre.

4e Exercice.

Interpréter géométriquement les quantités auxiliaires m, M, *employées au* n° 14 du Cours, *pour trouver* a, B, *connaissant* b, c, A; *ou bien* A, b, *connaissant* B, C, a, *dans un triangle sphérique.*

Solution : 1° Dans le premier cas *(fig. 1)*

$$\operatorname{tg} M = \operatorname{tg} b \cos A,$$
$$m \cos M = \cos b.$$

Du sommet C du triangle sphérique A, B, C, abaissons l'arc de grand cercle CD perpendiculaire au côté opposé AB. Posons

$$CD = x, \quad DA = y.$$

Le triangle rectangle CDA donne

$$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} b \cos A,$$
$$\cos b = \cos x \cos y,$$

ce qui montre que

$$M = y, \quad m = \cos x.$$

2° Dans le deuxième cas (*fig.* 2), m, M s'interprètent de la même manière sur le triangle polaire A'B'C' de ABC.

Si C'D' est l'arc de grand cercle perpendiculaire à A'B', on a

$$M = A'D', \quad m = \cos D'C'.$$

5e Exercice.

Démontrer le théorème suivant, très utile en géodésie :

THÉORÈME DE LEGENDRE. — *Étant donné un triangle sphérique dont les côtés a, b, c sont très petits et regardés comme du premier ordre par rapport au rayon 1 de la sphère; si l'on construit le triangle rectiligne dont les côtés a', b', c' sont respectivement égaux en longueur à a, b, c; si, en outre, on néglige les quantités du quatrième ordre :*

1° *Les surfaces* s, s' *de ces deux triangles sont égales;*

2° *Les angles* A, B, C *du triangle sphérique sont respectivement égaux aux angles* A', B', C' *du triangle rectiligne, augmentés du tiers de l'excès sphérique* s.

Démonstration : Dans la formule

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

remplaçons les sinus et cosinus de a, b, c par leurs valeurs développées en séries; nous aurons, en y négligeant le sixième ordre,

$$1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24} = \left(1 - \frac{b^2}{2} + \frac{b^4}{24}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2} + \frac{c^4}{24}\right) + \left(b - \frac{b^3}{6}\right)\left(c - \frac{c^3}{6}\right)\cos A,$$

ou

$$\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) = \frac{b^4 + c^4 - a^4}{24} + \frac{b^2c^2}{4} + bc\left(1 - \frac{b^2 + c^2}{6}\right)\cos A,$$

par suite

$$\cos A = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 - b^4 - c^4 - 6b^2c^2}{24bc}\right)\left(1 + \frac{b^2 + c^2}{6}\right).$$

Cette valeur de cos A est exacte au quatrième ordre près; mais à ce degré d'approximation, elle se simplifie et se réduit à

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2}{24bc},$$

c'est-à-dire à

(1) $$\cos A = \cos A' - \frac{1}{6} bc \sin^2 A'.$$

Si nous posons

$$A = A' + x,$$

x sera de l'ordre de bc ou du second ordre. Nous aurons donc, en négligeant le quatrième ordre,

(2) $$\cos A = \cos A' - x \sin A',$$

et en comparant (1), (2)

$$x = \frac{1}{6} bc \sin A' = \frac{s'}{3}.$$

Il résulte de là

$$A = A' + \frac{s'}{3}, \quad B = B' + \frac{s'}{3}, \quad C = C' + \frac{s'}{3},$$
$$A + B + C = 180^\circ + s',$$

ou bien :

1° $$s = s',$$

2° $$A = A' + \frac{s}{3}, \quad B = B' + \frac{s}{3}, \quad C = C' + \frac{s}{3}.$$

6e Exercice.

Du premier type des formules différentielles données au n° 16 du Cours, *tableau* B, *déduire les types suivants.*

Solution : On procédera, par voie d'élimination, en suivant la marche indiquée dans le premier exercice, ou toute autre marche analogue.

Ainsi, pour obtenir la première formule du deuxième type, on

éliminera d'abord δc entre les deux premières formules du premier type, ce qui donne

$$\begin{aligned}\sin b \sin C \cos A.\delta A - \sin c \sin A \cos B.\delta B &= \cos A.\delta a - \cos B.\delta b \\ &\quad + \cos B \cos C.\delta a - \cos A \cos C.\delta b \\ &= \cos a \sin B \sin C.\delta a - \cos b \sin A \sin C.\delta b;\end{aligned}$$

si on remplace ensuite $\sin b \sin C$ par $\sin c \sin B$ dans le coefficient de δA et si on divise par $\sin c \sin A \sin B$, on trouve

$$\cot A.\delta A - \cot B.\delta B = \frac{\cos a \sin C}{\sin A \sin c}\delta a - \frac{\cos b \sin C}{\sin B \sin c}\delta b,$$

ou

$$\cot A.\delta A - \cot B.\delta B = \cot a.\delta a - \cot b.\delta b.$$

Pour obtenir la première formule du troisième type, il suffira d'éliminer de même δc entre la première et la troisième formule du premier type. On a d'abord

$$\sin b \sin C.\delta A + \sin a \sin B \cos B.\delta C = \sin^2 B.\delta a - (\cos C + \cos A \cos B)\delta b,$$

puis

$$\sin c \sin B.\delta A + \sin a \sin B \cos B.\delta C = \sin^2 B.\delta a - \sin A \sin B \cos c.\delta b,$$

c'est-à-dire,

$$\sin c.\delta A = \sin B.\delta a - \sin A \cos c.\delta b - \cos B \sin a.\delta C.$$

On procédera de même pour établir les formules des autres types.

7e Exercice.

APPLICATIONS NUMÉRIQUES.

1° *Connaissant les trois angles* A, B, C *du triangle formé par trois étoiles, calculer les distances angulaires* a, b, c *de ces étoiles.*

Formules finies.

$$2S = A + B + C - 180°, \qquad \operatorname{tg}\frac{a}{2} = N.\sin(A - S),$$

$$\rho = \sin(A - S)\sin(B - S)\sin(C - S), \qquad \operatorname{tg}\frac{b}{2} = N.\sin(B - S),$$

$$N^2 = \frac{1}{\rho}\sin S, \qquad \operatorname{tg}\frac{c}{2} = N.\sin(C - S).$$

Formules différentielles.

$$\begin{aligned}\partial a &= \text{cosec}\, b.\text{cosec}\, C.\partial A + \cot c.\text{cosec}\, B.\partial B + \cot b.\text{cosec}\, C.\partial C\\ &= \alpha\, \partial A + \beta\, \partial B + \gamma\, \partial C,\\ \partial b &= \cot c.\text{cosec}\, A.\partial A + \text{cosec}\, c.\text{cosec}\, A.\partial B + \cot a.\text{cosec}\, C.\partial C\\ &= \alpha'\, \partial A + \beta'\, \partial B + \gamma'\, \partial C,\\ \partial c &= \cot b.\text{cosec}\, A.\partial A + \cot a.\text{cosec}\, B.\partial B + \text{cosec}\, a.\text{cosec}\, B.\partial C\\ &= \alpha''\, \partial A + \beta''\, \partial B + \gamma''\, \partial C.\end{aligned}$$

Tableau des calculs.

Données : A	$116^\circ 20' 2'',20$	Résultats : a	113. 2.56.64	coséc A + 1.116
B	75. 0.51,60	b	82.39.28.40	coséc B + 1.035
C	70. 6.59,16	c	74.54.31.06	coséc C + 1.064
2S	81.27.52,96	log tg $\frac{a}{2}$	0,179.621.2	cot b + 0.129
S	40.43.56,48			
A − S	75.36. 5,72	— $\frac{b}{2}$	9,944.194.9	cot c + 0.270
B − S	34.16.55,12			
C − S	29.23. 2,68	— $\frac{c}{2}$	9,884.263.3	coséc c + 1.036
log sin (A − S)	9,986.140.0			
— (B − S)	9,750.713.7			
— (C − S)	9,690.782.1	— $\frac{a}{2}$	$56^\circ 31' 28'',32$	α'' + 0.144
— ρ	9,427.635.8			
— sin S	9,814.598.1	— $\frac{b}{2}$	41.19.44,20	α' + 0.301
— N²	0,386.962.3			
— N	0,193.481.2	— $\frac{c}{2}$	37.27.15,53	β' + 1.156
		— a	113. 2.56,64	cot c + 0.270
		— b	82.39.28,40	cot a — 0.425
		— c	74.54.31,06	coséc a + 1.086
				β + 0.279
				β'' — 0.440
				γ'' + 1.124
				cot a — 0.425
				cot b + 0.129
				coséc b + 1.008
				γ' — 0.452
				γ + 0.137
				α + 1.073

$$\begin{aligned}\partial a &= +\,1{,}073\,\partial A + 0{,}279\,\partial B + 0{,}137\,\partial C,\\ \partial b &= +\,0{,}301\,\partial A + 1{,}156\,\partial B - 0{,}452\,\partial C,\\ \partial c &= +\,0{,}144\,\partial A - 0{,}440\,\partial B + 1{,}124\,\partial C.\end{aligned}$$

2° *Résoudre un triangle, connaissant les trois côtés a, b, c.*

Formules finies.

$$2p = a + b + c, \qquad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \mathrm{A} = \mathrm{N} \operatorname{coséc}(p - a),$$
$$\rho = \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c), \qquad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \mathrm{B} = \mathrm{N} \operatorname{coséc}(p - b),$$
$$\mathrm{N}^2 = \rho . \operatorname{coséc} p, \qquad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \mathrm{C} = \mathrm{N} \operatorname{coséc}(p - c).$$

Formules différentielles.

$$\partial \mathrm{A} = \operatorname{coséc} b . \operatorname{coséc} \mathrm{C} . \partial a - \operatorname{coséc} b . \cot \mathrm{C} . \partial b - \operatorname{coséc} c . \cot \mathrm{B} . \partial c = \alpha\, \partial a + \beta\, \partial b + \gamma\, \partial c,$$
$$\partial \mathrm{B} = - \operatorname{coséc} a . \cot \mathrm{C} . \partial a + \operatorname{coséc} c . \operatorname{coséc} \mathrm{A} . \partial b - \operatorname{coséc} c . \cot \mathrm{A} . \partial c = \alpha' \partial a + \beta' \partial b + \gamma' \partial c,$$
$$\partial \mathrm{C} = - \operatorname{coséc} a . \cot \mathrm{B} . \partial a - \operatorname{coséc} b . \cot \mathrm{A} . \partial b + \operatorname{coséc} a . \operatorname{coséc} \mathrm{B} . \partial c = \alpha'' \partial a + \beta'' \partial b + \gamma'' \partial c.$$

Tableau des calculs.

Données : a	113° 2′ 56″,64	Résultats : A	116° 20′ 2″,20	coséc a + 1.086
b	82.39.28,40	B	75. 0.51,60	coséc b + 1.008
c	74.54.31,06	C	70. 6.59,16	coséc c + 1.036
$2p$	270.36.56,10	log tg $\frac{A}{2}$	0,207.031.1	coséc B + 1.035
p	135.18.28,05			cot B + 0.268
$p - a$	22.15.31,41	— $\frac{B}{2}$	9,885.093.0	cot C + 0.362
$p - b$	52.38.59,65			γ'' + 1.124
$p - c$	60.23.56,99	— $\frac{C}{2}$	9,846.165.6	α'' − 0.291
log sin $(p - a)$	9,578.398.0			α' − 0.393
— $(p - b)$	9,900.336.1			coséc C + 1.064
— $(p - c)$	9,939.263.5	$\frac{A}{2}$	58° 10′ 1″,10	cot C + 0.362
— ρ	9,417.997.6			cot A − 0.495
— coséc p	0,152.860.6	$\frac{B}{2}$	37.30.25,80	α + 1.073
— N^2	9,570.858.2			β − 0.365
— N	9,785.429.1	$\frac{C}{2}$	35. 3.29,58	β'' + 0.499
				coséc A + 1.116
		A	116.20. 2,20	cot A − 0.495
		B	75. 0.51,60	cot B + 0.268
		C	70. 6.59,16	β' + 1.156
				γ' + 0.513
				γ − 0.278

$$\partial \mathrm{A} = + 1{,}073\, \partial a - 0{,}365\, \partial b - 0{,}278\, \partial c,$$
$$\partial \mathrm{B} = - 0{,}393\, \partial a + 1{,}156\, \partial b + 0{,}513\, \partial c,$$
$$\partial \mathrm{C} = - 0{,}291\, \partial a + 0{,}499\, \partial b + 1{,}124\, \partial c.$$

3° *Résoudre un triangle connaissant a, b, C.*

Formules finies.

$$\cos\frac{c}{2}\cdot\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}\cos\frac{a-b}{2},\qquad \sin\frac{c}{2}\sin\frac{A-B}{2}=\cos\frac{C}{2}\sin\frac{a-b}{2},$$

$$\cos\frac{c}{2}\cdot\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}\cos\frac{a+b}{2},\qquad \sin\frac{c}{2}\cos\frac{A-B}{2}=\sin\frac{C}{2}\sin\frac{a+b}{2},$$

Formules différentielles.

$$\begin{aligned}\partial A &= \text{coséc}\,c.\sin B\,\partial a - \cot c.\sin A.\partial b - \text{coséc}\,c.\sin a\cos B.\partial C\\ &= \alpha\,\partial a + \beta\,\partial b + \gamma\,\partial C,\\ \partial B &= -\cot c.\sin B.\partial a + \text{coséc}\,c.\sin A\,\partial b - \text{coséc}\,c.\sin b\cos A.\partial C\\ &= \alpha'\partial a + \beta'\partial b + \gamma'\partial C,\\ \partial c &= \cos B\,\partial a + \cos A\,\partial b + \sin a\sin B.\partial C\\ &= \alpha''\partial a + \beta''\partial b + \gamma''\partial C.\end{aligned}$$

Tableau des calculs.

Données : a	$113°\,2'\,56'',64$	Résultats : A	$116°\,20'\,2'',20$	$\sin A + 0.896$
b	82.39.28,40	B	75. 0.51,60	$\sin B + 0.966$
C	70. 6.59,16	c	74.54.31,06	$\sin a + 0.921$
$a+b$	+195.42.25,04	$\log.\cos\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}(A+B)$	+9,897.599.0	$\text{coséc}\,c = +1.036$
$a-b$	+ 30.23.28,24	$-\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(A+B)$	−8,894.799.5	$\cot c = +0.270$
$\frac{1}{2}(a+b)$	97.51.12,52	$-\ \text{tg}\frac{1}{2}(A+B)$	−1,002.799.5	$\beta' = +0.928$
$\frac{1}{2}(a-b)$	15.11.44,12	$\log.\sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}(A-B)$	+9,331.546.9	$\beta\ -0.242$
$\frac{1}{2}C$	35. 3.29.58	$-\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(A-B)$	+9,755.128.2	$\alpha\ +1.001$
$\log\sin\frac{1}{2}(a-b)$	+ 9,418.491.7	$-\ \text{tg}\frac{1}{2}(A-B)$	+9,576.418.7	$\alpha'\ -0.261$
$-\cos\frac{1}{2}C$	+ 9,913.055.2	$\frac{1}{2}(A+B)$	95.40.26,90	$\cos B = \alpha'' = +0.259$
$-\cos\frac{1}{2}(a-b)$	+ 9,984.543.9	$\frac{1}{2}(A-B)$	20.39.35,30	$\cos A = \beta'' = -0.444$
$-\sin\frac{1}{2}(a+b)$	+ 9,995.907.4	$\log\sin\frac{1}{2}(A+B)$	9,997.866.8	$\sin b = +0.992$
$-\sin\frac{1}{2}C$	+ 9,759.220.8	$-\sin\frac{1}{2}(A-B)$	9,547.551.4	$\gamma = -0.247$
$-\cos\frac{1}{2}(a+b)$	− 9,135.578.7	$\log.\sin\frac{1}{2}c$	+9,783.995.5	$\gamma' = +0.456$
		$-\cos\frac{1}{2}c$	+9,899.732.2	$\gamma'' = +0.890$
		$\text{tg}\frac{c}{2}$	9,884.263.3	
		$\frac{c}{2}$	37.27.15,53	

$$\begin{aligned}\partial A &= +1,001\,\partial a - 0,242\,\partial b - 0,247\,\partial C,\\ \partial B &= -0,261\,\partial a + 0,928\,\partial b + 0,456\,\partial C,\\ \partial c &= +0,259\,\partial a - 0,444\,\partial b + 0,890\,\partial C.\end{aligned}$$

Afin d'engager nos lecteurs à faire usage des logarithmes de Gauss, si avantageux dans la plupart des questions d'astronomie pratique, nous les appliquons ici à la résolution des triangles précédents.

I. — *Étant donnés les trois angles* A, B, C *d'un triangle sphérique, calculer les trois côtés* a, b, c.

Formules.

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C} = \frac{\alpha}{\sin B \sin C},$$

$$\cos b = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\sin A \sin C} = \frac{\beta}{\sin A \sin C},$$

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B} = \frac{\gamma}{\sin A \sin B},$$

Tableau des calculs.

Données : A	116°.20′. 2″,20	Résultats : a	113°. 2′.56″,64
B	75. 0.51,60	b	82.39.28,40
C	70. 6.59,16	c	74.54.31,07
log sin A +	9,952.416.5	log cos A —	9,646.993.8
— sin B +	9,984.972.9	— cos B cos C +	8,944.209.7
— sin C +	9,973.306.0	»	0,606.822.4
		— α —	9,551.032.1
— cos A —	9,646.993.8	— sin B sin C +	9,958.278.0
— cos B +	9,412.590.6	— cos a —	9,592.753.2
— cos C +	9,531.619.1		
		— cos B +	9,412.590.6
		— cos A cos C —	9,178.612.9
		»	9,853.618.7
		— β +	9,032.231.6
		— sin A sin C +	9,925.722.5
		— cos b +	9,106.509.1
		— cos C +	9,531.619.1
		— cos A cos B —	9,059.584.4
		»	0,293.377.7
		— γ +	9,352.962.1
		— sin A sin B +	9,937.389.4
		— cos c +	9,415.572.7

II. — *Connaissant les trois côtés a, b, c calculer* A, B, C.

Formules.

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \frac{\alpha}{\sin b \sin c},$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} = \frac{\beta}{\sin a \sin c},$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} = \frac{\gamma}{\sin a \sin b}.$$

Tableau des calculs.

Données : a	113°. 2′.56″,64	Résultats : A	116°.20′. 2″,20
b	82.39.28,40	B	75. 0.51,60
c	74.54.31,07	C	70. 6.59,16
log sin a +	9,963.868.0	log cos a —	9,592.753.2
— sin b +	9,996.424.4	— cos b cos c +	8,522.081.8
— sin c +	9,984.757.6	»	0,035.422.6
		— α —	9,628.175.8
— cos a —	9,592.753.2	— sin b sin c +	9,981.182.0
— cos b +	9,106.509.1	— cos A —	9,646.993.8
— cos c +	9,415.572.7		
		— cos b +	9,106.509.1
		— cos a cos c —	9,008.325.9
		»	0,254.707.1
		— β +	9,361.216.2
		— sin a sin c +	9,948.625.6
		— cos B +	9,412.590.6
		— cos c +	9,415.572.7
		— cos a cos b —	8,699.262.3
		»	0,076.338.8
		— γ +	9,491.911.5
		— sin a sin b +	9,960.292.4
		— cos C +	9,531.619.1

III. — *Résoudre un triangle, connaissant a, b et l'angle compris* C.

Formules.

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}, \quad \sin A = \frac{\sin C}{\sin c} \sin a,$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}, \quad \sin B = \frac{\sin C}{\sin c} \sin b.$$

Tableau des calculs.

	° ′ ″			° ′ ″
Données : a	113. 2.56,64	Résultats :	A	116.20. 2,20
b	82.39.28,40		B	75. 0.51,60
C	70. 6.59,16		c	74.54.31,07
log sin a +	9,963.868.0	log cos a cos b	—	8,699.262.3
— sin b +	9,993.424.4	— sin a sin b cos C	+	9,491.911.5
		»		0,716.310.4
— cos a —	9,592.753.2	— cos c	+	9,415.572.7
— cos b +	9,106.509.1	— sin c		9,984.757.6
— cos C +	9,531.619.1	— cos a	—	9,592.753.2
		— cos b cos c	+	8,522.081.8
		»		0,035.422.6
		— α	—	9,628.175.8
		— sin b sin c	+	9,981.182.0
		cos A	—	9,646.993.8
		— cos b	+	9,106.509.1
		— cos a cos c	—	9,008.325.9
		»		0,254.707.1
		— β	+	9,361.216.2
		— sin a sin c	+	9,948.625.6
		cos B	+	9,412,590.6

REMARQUES GÉNÉRALES.

1° Il est aisé de comprendre, sur ces exemples, l'usage et l'importance des formules différentielles lorsqu'on veut avoir une idée juste de l'approximation des résultats obtenus. Il suffit de remplacer, dans les seconds membres de ces formules, les erreurs des données par

leurs limites généralement connues et de faire la somme des valeurs absolues des trois termes, pour avoir les limites correspondantes de l'erreur absolue des résultats.

Si dans les trois exemples précédents et considérés indépendamment les uns des autres, nous supposons les limites des erreurs de données égales entre elles et à $\pm$ E, nous aurons ainsi pour les limites des erreurs des résultats :

1° $\delta a = \pm 1{,}489\,E$, $\delta b = \pm 1{,}908\,E$, $\delta c = \pm 1{,}708\,E$;
2° $\delta A = \pm 1{,}716\,E$, $\delta B = \pm 2{,}062\,E$, $\delta C = \pm 1{,}914\,E$;
3° $\delta A = \pm 1{,}590\,E$, $\delta B = \pm 1{,}645\,E$, $\delta c = \pm 1{,}593.E$.

Ces expressions sont évidemment très commodes si, dans une discussion numérique, on est conduit à faire différentes hypothèses sur la valeur de E.

2° Nous ferons ici une remarque très simple, pour prévenir une erreur assez grossière dans laquelle j'ai vu tomber quelques élèves.

Si, pour déterminer un angle x, on a mesuré diverses quantités m, n, p, q, ... qui lui sont liées par la relation

$$(1) \qquad f(x, m, n, p, q, \ldots) = 0,$$

l'erreur δx, commise sur x, sera donnée en fonction des erreurs δm, δn, δp, δq, ... commises sur les mesures de m, n, p, q, ... par l'équation

$$(2) \qquad f'_x \delta x + f'_m.\delta m + f'_n.\delta n + f'_p \delta p + f'_q \delta q + \ldots = 0.$$

Toute transformation légitime de (1) ne saurait donner, pour déterminer x, une formule nouvelle plus précise. La différentiation de cette formule nouvelle conduirait toujours à une relation équivalente et réductible à (2).

Pour augmenter la précision de x, sans augmenter la précision des mesures, il faut déterminer cette inconnue en mesurant un autre système de quantités, s'il est possible.

Ainsi, toutes choses égales d'ailleurs, un petit arc x est mal déterminé par la mesure a de son cosinus et les relations $\cos^2 x = a^2$ ou $\sin^2 x = 1 - a^2$, ou toute autre équivalente conduirait, pour l'erreur δx de x, à l'expression unique $\delta x = \pm$ coséc $x.\delta a$. Pour

mieux déterminer x, il faudra mesurer une autre quantité, son sinus par exemple. C'est dans ce sens qu'on dit brièvement qu'un petit arc est bien ou mal déterminé par son sinus ou son cosinus : en termes plus explicites par la mesure directe de son sinus ou de son cosinus.

Mais on ne veut pas dire par là qu'un tel arc x est bien déterminé par toute équation de la forme $\sin x = \alpha$ et mal par toute équation de la forme $\cos x = \beta$. Le contraire peut avoir lieu et, pour se prononcer, il faut connaître la nature des quantités mesurées ainsi que l'expression de α ou β au moyen de ces quantités.

8e Exercice.

Établir par la géométrie les relations différentielles du tableau B, n° 16 du COURS.

Nous ne développerons pas la solution de cet exercice. Nous remarquerons seulement que l'établissement géométrique des formules différentielles est immédiat dans le cas assez fréquent où l'on ne fait varier qu'un seul des trois éléments qui définissent le triangle; et il est tout aussi simple d'y recourir, que de se reporter au tableau B pour y choisir la relation qu'il s'agit alors d'appliquer.

C'est d'ailleurs en faisant varier successivement et isolément chacun de ces trois éléments et faisant la somme des variations correspondantes d'un quatrième élément, qu'on établira géométriquement les relations générales.

9e Exercice.

Quelle est, en coordonnées astronomiques, l'équation d'un cercle de la sphère céleste, et en coordonnées géographiques, celle d'un cercle de la sphère terrestre?

Solution : Tout système usuel de coordonnées sphériques se rapporte à trois directions rectangulaires $O(x, y, z)$ menées par le centre O de la sphère considérée.

Soient A et A′ les points de rencontre de cette sphère avec la direction Oz et la direction contraire Oz' (*fig. 3*). Les coordonnées d'un point quelconque M de la surface sphérique sont :

1° $P =$ l'arc de grand cercle AM compris entre 0° et π.

2° $D =$ l'angle dièdre xOm formé par la direction Ox avec la direction Om, m étant à la rencontre du plan xOy avec le demi-grand cercle AMA′, et D étant compté à partir de Ox dans un sens déterminé.

Le cercle C étant donné par les coordonnées P_0, D_0 de son pôle S et par son rayon sphérique ρ ; son équation est fournie immédiatement par le triangle sphérique AMS qui donne

$$(1) \qquad \cos\rho = \cos P_0 \cos P + \sin P_0 \sin P \cos(D_0 - D).$$

Si C est un cercle céleste et si dans (1) on remplace D_0, P_0 et D, P par les coordonnées horizontales, horaires, équatoriales (a_0, z_0), (t_0, z_0), $(\mathcal{A}_0, \mathfrak{D}_0)$ de S et (a, z), (t, z), $(\mathcal{A}, \mathfrak{D})$ de M on aura l'équation du cercle en coordonnées correspondantes.

Si C est un cercle terrestre et si dans (1) on remplace D_0, P_0 et D, P par la longitude et la colatitude $(\mathfrak{L}_0, \varphi_0)$, $(\mathfrak{L}, \varphi)$ de S et M, on aura l'équation du cercle en coordonnées géographiques.

Enfin si on pose :

$$x = \sin P \cos D, \qquad y = \sin P \sin D, \qquad z = \cos P,$$

x, y, z seront les coordonnées rectilignes de M et l'équation (1) devient

$$\cos\rho = z \cos P_0 + y \sin P_0 \sin D_0 + x \sin P_0 \cos P_0$$

ou

$$\cos\rho = xx_0 + yy_0 + zz_0.$$

C'est l'équation du plan du cercle; on aura les équations ordinaires du cercle en y joignant celle de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

10e Exercice.

Exprimer le rayon sphérique ρ du petit cercle circonscrit au triangle sphérique formé par les positions de trois étoiles, en

fonction : 1° des trois côtés a, b, c; 2° des trois angles A, B, C *de ce triangle.*

Solution : On trouvera aisément les deux formules suivantes :

$$\operatorname{tg} \rho = \frac{2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}{\sqrt{\sin p . \sin (p - a) \sin (p - b) \sin (p - c)}},$$

$$\operatorname{tg} \rho = \frac{\sqrt{\sin \varepsilon}}{\sqrt{\sin (A - \varepsilon) \sin (B - \varepsilon) \sin (C - \varepsilon)}},$$

dans lesquelles

$$2p = a + b + c, \quad 2\varepsilon = A + B + C - 180^\circ.$$

On peut consulter à ce sujet la *Trigonométrie* de J.-A. Serret, 6ᵉ édition, p. 162.

CHAPITRE II

Développements en séries.

11ᵉ Exercice.

1° *Développer l'expression* $y = \dfrac{n - \cos x}{1 - 2n\cos x + n^2}$, *où* n^2 *est plus petit que* 1, *suivant les puissances ascendantes de* n, *en suivant la méthode des coefficients indéterminés.*

Solution : Nous avons vu (n° 19 du Cours) que, pour $n^2 < 1$, la fraction y est développable en série convergente, ordonnée suivant les puissances ascendantes de n. Soit donc

$$\frac{n - \cos x}{1 - 2n\cos x + n^2} = A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \dots + A_p n^p + \dots$$

Chassant le dénominateur et identifiant les coefficients des mêmes puissances de n dans les deux membres, nous avons successivement

$$n - \cos x = A_0 + n \left| \begin{array}{l} A_1 \\ -2A_0\cos x \\ \end{array} \right. + n^2 \left| \begin{array}{l} A_2 \\ -2A_1\cos x \\ +A_0 \end{array} \right. + \dots + n^p \left| \begin{array}{l} A_p \\ -2A_{p-1}\cos x \\ +A_{p-2} \end{array} \right. + \dots$$

et

$$\begin{array}{ll} A_0 + \cos x & = 0, \\ A_1 - 2A_0\cos x - 1 & = 0, \\ A_2 - 2A_1\cos x + A_2 & = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ A_p - 2A_{p-1}\cos x + A_{p-2} & = 0. \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \end{array}$$

On voit que la relation qui unit trois coefficients successifs A_{p-2},

A_{p-1}, A_p, est exactement la même que celle qui unit $\cos(p-2)x$, $\cos(p-1)x$, $\cos px$, car on a l'identité

$$\cos px - 2\cos(p-1)x.\cos x + \cos(p-2) = 0.$$

Comme $A_0 = -\cos x$, on aura donc généralement $A_p = -\cos(p+1)x$ et, par suite,

$$\frac{n - \cos x}{1 - 2n\cos x + n^2} = -(\cos x + n\cos 2x + \ldots + n^p\cos(p+1)x + \ldots).$$

2° *Développer l'expression* $\dfrac{\sin x}{1 - 2n\cos x + n^2}$, *où* n^2 *est plus petit que* 1, *suivant les puissances ascendantes de* n, *par la méthode des coefficients indéterminés.*

Solution : On procédera de la même manière que pour l'exercice précédent et on trouvera

$$\frac{\sin x}{1 - 2n\cos x + n^2} = \sin x + n\sin 2x + \ldots + n^p\sin(p+1)x + \ldots$$

12° Exercice.

Étendre, au cas de $K < 0$, *le développement en série de l'équation* $\operatorname{tg} y = K \operatorname{tg} x$, *démontré pour* $K > 0$, *au* n° 18 du COURS.

Solution : Pour $K > 0$ nous avons vu que

$$y = m\varpi + x + \frac{n}{1}\sin 2x + \frac{n^2}{2}\sin 4x + \ldots + \frac{n^p}{p}\sin 2px + \ldots,$$

où m est un entier quelconque, déterminé par la valeur, en général connue *a priori*, de y pour $x = 0$, et où $n = \dfrac{K-1}{K+1}$.

Dans le cas de K négatif, il suffit, pour rentrer dans le cas précédent, de mettre l'équation proposée sous la forme

$$\operatorname{tg}(-y) = (-K)\operatorname{tg} x,$$

en posant

$$n' = \frac{-K-1}{-K+1} = \frac{K+1}{K-1} = \frac{1}{n},$$

on aura immédiatement

$$-y = m\varpi + x + \frac{n'}{1}\sin 2x + \dots + \frac{n'^p}{p}\sin 2px + \dots$$

ou

$$y = -m\varpi - x - \frac{1}{n}\sin 2x - \dots - \frac{1}{p.n^p}.\sin 2px - \dots$$

13° Exercice.

Sur une sphère de rayon un, *on donne un arc de grand cercle* CB $= a$. *Par le point* B *on mène un grand cercle* BAy *dans une direction variable, faisant l'angle* B *avec la direction fixe* CBx. *De* C *on abaisse un grand cercle* CAz *perpendiculaire à* By. *On propose de développer en série l'angle* zCx, *en supposant* $a < \frac{\pi}{2}$.

Solution : Le triangle rectangle ABC *(fig. 4)* donne

$$\cos a = \cot C \cot(\pi - B),$$

ou

$$\text{tg } C = \text{séc } a . \text{tg}\left(B - \frac{\pi}{2}\right).$$

Il suffira donc d'appliquer à l'équation (1) la série (22) du n° 18 du Cours, en posant

$$y = C, \quad x = B - \frac{\pi}{2}, \quad n = \frac{\text{séc } a - 1}{\text{séc } a + 1} = \text{tg}^2 \tfrac{1}{2} a.$$

On obtient ainsi

$$C = -90° + B - \text{tg}^2 \tfrac{1}{2} a . \sin 2B + \dots \pm \frac{1}{p} \text{tg}^{2p} \tfrac{1}{2} a \sin 2pB \dots \left\{ p \begin{matrix} \text{pair} & + \\ \text{impair} & - \end{matrix} \right.$$

série d'autant plus convergente que a est plus petit.

On tire de là, pour les variations simultanées, δB, δC, de B et C,

$$\delta C = \delta B - 2\,\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}a\cos(2B+\delta B)\sin\delta B + \ldots \pm \frac{2}{p}\,\mathrm{tg}^{2p}\tfrac{1}{2}a\cos p(2B+\delta B)\sin p\,\delta B \ldots$$

ou bien

$$\delta C = \delta B + 2\sum \pm \frac{1}{p}\,\mathrm{tg}^{2p}\tfrac{1}{2}a\cos p(2B+\delta B)\sin p\delta B\,.\; p \begin{cases}\text{pair} & +\\ \text{impair} & -\end{cases}$$

Nous trouverons une application de cette dernière série dans la théorie de la lunette méridienne à grand champ.

14e Exercice.

Trouver la formule générale donnant les coefficients a_p, b_p de la série de Fourier, lorsqu'on connaît les valeurs de la fonction $\psi(z)$ que représente cette série, pour un certain nombre de valeurs équidistantes de la variable.

Solution : Soit

$$(1)\quad \psi(z) = a_0 + a_1\cos z + a_2\cos 2z + \ldots + a_p\cos pz + \ldots + b_1\sin z + b_2\sin 2z + \ldots + b_p\sin pz + \ldots$$

Supposons connues les valeurs de $\psi(z)$ pour les q valeurs $0, \frac{2\pi}{q}, 2\frac{2\pi}{q}, \ldots\ m\cdot\frac{2\pi}{q}, \ldots\ (q-1)\frac{2\pi}{q}\cdot$ On aura entre les coefficients q équations qui détermineront $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p$ et $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_p$, si on néglige les coefficients suivants comme insensibles et si $(2p+1)$ est au plus égal à q.

Cette détermination se fait élégamment de la manière suivante : Multiplions les deux membres de l'égalité (1) par $\cos p'z$, p' étant un entier positif comme p. Nous aurons

$$(2)\ \psi(z)\cos p'z = a_0\cos p'z + \ldots + \tfrac{1}{2}a_p\cos(p+p')z + \tfrac{1}{2}a_p\cos(p-p')z + \ldots + \tfrac{1}{2}b_p\sin(p+p')z + \tfrac{1}{2}b_p\sin(p-p')z + \ldots$$

Si dans (2) on substitue successivement à z les q valeurs $0, \frac{2\pi}{q}$,

$2\frac{2\pi}{q}, \cdots (q-1)\frac{2\pi}{q}$ et si on ajoute membre à membre les égalités résultantes, on a

$$(3)\quad \sum \psi(z_m)\cos p'z_m = a_0 \sum \cos p'z_m + \ldots$$
$$+ \tfrac{1}{2} a_p \sum \cos(p+p')z_m + \tfrac{1}{2} a_p \sum \cos(p-p')z_m + \ldots$$
$$+ \tfrac{1}{2} b_p \sum \sin(p+p')z_m + \tfrac{1}{2} b_p \sum \sin(p-p')z_m + \ldots$$

en posant

$$z_m = m\frac{2\pi}{q},$$

et étendant le signe $\sum$ aux valeurs entières $0, 1, 2, \ldots (q-1)$ de m.

Mais on sait (théorème I, n° 24 du COURS) que les sommes de sinus qui, dans le second membre, multiplient b_p sont toujours nulles, tandis que les sommes de cosinus qui multiplient a_p sont égales à q ou nulles suivant que $p+p'$, $p-p'$ sont ou non multiples de q, c'est-à-dire suivant que

$$p = rq - p' \quad \text{ou} \quad rq + p',$$

r étant un entier positif. L'équation (3) se réduit donc à

$$\sum_{m=0}^{m=q-1} \psi(z_m)\cos p'z_m = \frac{q}{2}\sum_{r=0}^{r=\infty}(a_{rq-p'} + a_{rq+p'})$$

ou, en prenant $p' = p$, et remarquant que le coefficient a_{-p} est nul puisqu'il n'existe pas dans la série,

$$(4)\quad \sum_{m=0}^{m=q-1} \psi(z_m)\cos pz_m = \frac{q}{2}(a_p + a_{q-p} + a_{q+p} + a_{2q-p} + a_{2q+p} + \ldots).$$

On démontrerait de même, en multipliant (1) par $\sin p'z$, que

$$(5)\quad \sum_{m=0}^{m=q-1} \psi(z_m)\sin pz_m = \frac{q}{2}(b_p - b_{q-p} + b_{q+p} - b_{2q-p} + b_{2q+p} - \ldots).$$

Les formules (4) et (5) sont rigoureuses, et si nous supposons

$2p < q$ ou $p < q - p > \frac{q}{2}$, les termes qui suivent a_p, b_p dans les parenthèses doivent être négligés et l'on a :

$$a_p = \frac{2}{q} \sum_{m=0}^{m=q-1} \psi(z_m) \cos p z_m,$$

$$b_p = \frac{2}{q} \sum_{m=0}^{m=q-1} \psi(z_m) \sin p z_m,$$

avec une approximation d'autant plus grande que q est plus grand et p plus petit, puisque les erreurs commises sur a_p, b_p sont sensiblement égales à $- a_{q-p}$ et $+ b_{q-p}$.

CHAPITRE III

Erreurs accidentelles.

15e Exercice.

Comment est-on conduit à chercher si, pour une série d'observations nombreuses d'une même grandeur invariable, le nombre Δy des erreurs tombant entre x et $x + \Delta x$, Δx étant fixe, ne serait pas représenté par la formule

$$\Delta y = \Delta y_0 \, e^{-\frac{x^2}{\delta^2}}, \tag{1}$$

où Δy_0 et δ sont des constantes?

Réponse : Après avoir formé la moyenne m des mesures et pris pour valeur très approchée de l'erreur x d'une observation a la différence $m - a$, on construit, comme nous l'avons indiqué aux nos 31, 32 du Cours, la courbe empirique ayant x pour abscisse et Δy pour ordonnée. On remarque que les allures de cette courbe ressemblent beaucoup à celles de la courbe exponentielle bien connue $\Delta y = e^{-x^2}$.

Prendre $\Delta y = ne^{-\frac{x^2}{\delta^2}}$ revient à contracter ou dilater la courbe exponentielle dans le sens des ordonnées, suivant que a est plus petit ou plus grand que 1, et aussi dans le sens des abscisses suivant que δ est plus petit ou plus grand que 1. Il y a donc lieu d'espérer qu'en choisissant convenablement n et δ on reproduira la forme de la courbe empirique et c'est ce qui a lieu.

Cette marche suivie par M. Faye pour établir l'équation (1) nous paraît la plus rationnelle et nous l'avons adoptée. Elle suppose seulement que la moyenne arithmétique d'une série de mesures directes d'une même quantité fixe est une valeur de cette quantité beaucoup plus approchée que chaque mesure individuelle, ce qui est absolument incontestable. Mais elle ne suppose nullement que

cette moyenne est la valeur la plus probable de cette quantité. Cette dernière proposition, quoique exacte, est loin d'être évidente *a priori*. Elle a été cependant prise souvent comme axiome et il est facile d'en tirer la formule (1), comme nous pouvons le voir dans un grand nombre d'ouvrages.

REMARQUES.

Toute mesure instrumentale se divise en deux parties : 1° La manœuvre de l'instrument qui s'opère avec une certaine erreur variable, mais toujours comprise entre certaines limites numériques $-\alpha$ et $+\alpha$. La valeur absolue α dépend de la nature de la manœuvre, c'est-à-dire de l'instrument, et de l'habileté de l'opérateur. 2° La lecture sur l'instrument de la manœuvre ou de la mesure faite, lecture dont l'erreur variable est aussi toujours comprise entre certaines limites $-\beta$ et $+\beta$. La valeur absolue β dépend de la nature des dispositifs lecteurs et de l'habileté de l'observateur.

Abstraction faite de cette habileté, qui dépend surtout de l'exercice de la main ou de l'œil et qu'on peut supposer la même dans les deux parties, on peut dire que, dans tout instrument bien fait, β doit être sensiblement plus petit que α.

Si l'on avait $\alpha \leq \beta$, toutes les lectures seraient les mêmes, quelles que soient les erreurs accidentelles d'une même manœuvre répétée un grand nombre de fois. La loi de ces erreurs serait masquée et ne se manifesterait pas.

Si, au contraire, l'on a $\alpha > \beta$, si 2α renferme m fois β, il y aura m lectures différentes dans une même mesure suffisamment répétée et si m est assez grand, par exemple égal ou supérieur à 100, la loi des erreurs accidentelles de manœuvre se manifestera.

Comme exemple, le plus fréquent en astronomie, considérons le pointé du fil mobile d'une lunette sur l'image i d'un point fixe dont on veut mesurer la position dans le champ. On exécute cette mesure : 1° en *pointant* le point, c'est-à-dire en amenant le fil à bissecter l'image i; l'erreur de manœuvre ou de pointé est comprise entre $-\alpha$ et $+\alpha$; 2° en lisant, pour chaque pointé, le nombre de tours et la fraction de tour exécutés, à partir d'une position initiale, d'ailleurs arbitraire, par la vis micrométrique qui commande le fil. Cette lecture se fait sur un tambour divisé adapté à la tête de la vis; son

erreur est comprise entre — β et + β. Dans beaucoup de lunettes, α peut atteindre une division du tambour et β le dixième seulement d'une division.

16ᵉ Exercice.

Faire une série de pointés sur un trait de cercle divisé, pour déterminer l'erreur probable d'un pointé et vérifier la loi de fréquence des erreurs.

Nous avons montré dans le Cours, par deux exemples tirés, l'un des observations de Bradley, l'autre des mémoires du général Didion, comment la représentation graphique des erreurs comprises entre des limites déterminées permet de trouver la loi analytique de la fréquence des erreurs.

Les trois séries d'observations suivantes, faites à l'observatoire de Besançon, ont pour but de conduire au même résultat et de donner l'erreur probable d'un pointé pour trois observateurs.

Dans chaque série, on a pointé un même trait d'un cercle. On n'a inscrit que les parties de chaque pointé et le nombre de fois qu'il s'est reproduit. Nous avons désigné :

Par m, la valeur moyenne des pointés de la série;
e, l'erreur de chaque pointé ou sa différence avec m;
ε, l'erreur moyenne d'un pointé;
r, l'erreur probable d'un pointé;
α et β, les nombres théoriques et réels des erreurs tombant entre des limites données.

Nous avons représenté par une ligne ponctuée la courbe réelle de la fréquence des erreurs donnée par chaque série, et par une ligne pleine la courbe théorique correspondante.

Pour les deux dernières séries, nous avons inscrit le numéro d'ordre de chaque pointé sous la valeur de ce pointé et construit ainsi deux tableaux qui représentent fidèlement l'ordre de succession des valeurs des pointés et la manière dont la courbe réelle, prise après un certain nombre de ces pointés, se corrige et se perfectionne en tendant vers la courbe théorique, à mesure que le nombre des pointés augmente.

Série de pointés, par M. GRUEY, sur un trait du cercle Gautier.

Pointés.		Nombre.	Produits.	Erreur e.	e^2.	$e^2 \times$ nombre.
1,7	$\times$	1	1,7	+ 0,49	0,24	0,24
1,8		2	3,6	+ 0,39	0,15	0,30
1,9		6	11,4	+ 0,29	0,08	0,48
2,0		14	28,0	+ 0,19	0,04	0,56
2,1		18	37,8	+ 0,09	0,01	0,18
2,2		26	57,2	— 0,01	0,00	0,00
2,3		19	43,7	— 0,11	0,01	0,19
2,4		12	28,8	— 0,21	0,04	0,48
2,5		5	12,5	— 0,31	0,09	0,45
2,6		1	2,6	— 0,41	0,17	0,17
Sommes.		104	227,3		0,83	3,05

$$m = 2{,}19, \qquad \varepsilon = 0{,}17, \qquad r = 0{,}12.$$

Nombre théorique	Nombre réel	des erreurs entre
24	26	— 0,05 et + 0,05
64	63	— 0,15 et + 0,15
89	89	— 0,25 et + 0,25
100	100	— 0,35 et + 0,35
103	103	— 0,45 et + 0,45
104	104	— 0,55 et + 0,55

α Nombre théorique	β Nombre réel	des erreurs entre
24	26	— 0,05 et + 0,05
{ 20	{ 18	{ + 0,05 et + 0,15
{ 20	{ 19	{ — 0,05 et — 0,15
{ 12,5	{ 14	{ + 0,15 et + 0,25
{ 12,5	{ 12	{ — 0,15 et — 0,25
{ 5,5	{ 6	{ + 0,25 et + 0,35
{ 5,5	{ 5	{ — 0,25 et — 0,35
{ 1,5	{ 2	{ + 0,35 et + 0,45
{ 1,5	{ 1	{ — 0,35 et — 0,45
{ 0,5	{ 1	{ + 0,45 et + 0,55
{ 0,5	{ 0	{ — 0,45 et + 0,55

(Voir figure 5.)

Série de pointés par M. HÉRIQUE, sur un trait du cercle Rigaud.

	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7
1	27	16	9	3	4	1	18	2	34
2	29	39	15	12	7	5	21	6	74
3	134	50	20	17	10	8	24	41	110
4	157	55	23	22	13	11	35	44	
5	165	58	28	25	14	31	38	48	
6		88	32	30	19	33	47	68	
7		96	51	36	26	43	60	80	
8		122	53	42	37	45	63	102	
9		140	57	46	40	49	72	115	
10		156	61	56	52	54	79	128	
11		162	64	66	59	65	82	138	
12		164	70	67	62	75	85	160	
13		166	83	77	69	78	91		
14		177	87	81	71	92	101		
15		191	94	84	73	105	108		
16		198	98	89	76	109	111		
17			106	93	86	112	114		
18			131	95	90	116	120		
19			133	97	99	118	124		
20			146	100	103	125	132		
21			155	117	104	129	136		
22			159	121	107	148	142		
23			172	123	113	149	151		
24			185	135	119	152	153		
25			192	145	126	161	173		
26			197	150	127	170	186		
27				163	130	179	188		
28				167	137	182	196		
29				169	139	184			
30				176	141	189			
31				180	143	195			
32				181	144				
33				190	147				
34				194	154				
35				200	158				
36					168				
37					171				
38					174				
39					175				
40					178				
41					183				
42					187				
43					193				
44					199				

Pointés.	Nombre.	Produits.	e	e^2	$e^2 \times$ nombre.
1p9 ×	5	9,5	+ 0,39	0,1521	0,7605
2,0	16	32,0	+ 0,29	0,0841	1,3456
2,1	26	54,6	+ 0,19	0,0361	0,9386
2,2	35	77,0	+ 0,09	0,0081	0,2835
2,3	44	101,2	— 0,01	0,0001	0,0044
2,4	31	74,4	— 0,11	0,0121	0,3751
2,5	28	70,0	— 0,21	0,0441	1,2348
2,6	12	31,2	— 0,31	0,0961	1,1532
2,7	3	8,1	— 0,41	0,1681	0,5043
Sommes.	200	458,0			6,6000

$$m = 2{,}29 \qquad \varepsilon = 0{,}18 \qquad r = 0{,}12.$$

Nombre théorique	Nombre réel	des erreurs entre
44	44	— 0,05 et + 0,05
118	110	— 0,15 et + 0,15
166	164	— 0,25 et + 0,25
190	192	— 0,35 et + 0,35
198	200	— 0,45 et + 0,45

α Nombre théorique	β Nombre réel	des erreurs entre
44	44	— 0,05 et + 0,05
{ 37	{ 35	{ + 0,05 et + 0,15
{ 37	{ 31	{ — 0,05 et — 0,15
{ 24	{ 26	{ + 0,15 et + 0,25
{ 24	{ 28	{ — 0,15 et — 0,25
{ 12	{ 16	{ + 0,25 et + 0,35
{ 12	{ 12	{ — 0,25 et — 0,35
{ 4	{ 5	{ + 0,35 et + 0,45
{ 4	{ 3	{ — 0,35 et — 0,45

(Voir figure 6.)

Série de pointés, par M. GUILLIN, sur un trait du cercle Gautier.

	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6
1	157	63	51	18	1	3	2	10	23
2	172	77	53	41	5	4	16	20	26
3		158	56	49	7	6	22	29	43
4		165	57	50	9	8	24	104	
5		184	60	52	11	12	27	202	
6		197	64	55	13	17	34		
7			66	58	14	25	37		
8			74	59	15	28	46		
9			79	62	19	31	49		
10			100	65	21	33	101		
11			121	67	30	35	147		
12			126	68	32	38	164		
13			128	69	36	39	171		
14			135	70	42	40	179		
15			138	72	45	44	181		
16			151	73	47	54	186		
17			153	78	48	85	194		
18			159	81	61	88	195		
19			166	84	71	91	196		
20			175	86	75	96	198		
21			183	89	76	102	201		
22			189	94	80	105			
23			190	95	82	107			
24				98	87	108			
25				117	90	112			
26				122	92	115			
27				124	93	118			
28				127	97	123			
29				129	99	125			
30				130	103	140			
31				132	106	141			
32				133	109	142			
33				136	110	144			
34				137	111	146			
35				143	113	149			
36				145	114	155			
37				154	116	156			
38				167	119	160			
39				173	120	161			
40				174	131	163			
41				180	134	170			
42				185	139	176			
43				188	148	182			
44				191	150	200			
45				193	152				
46					162				
47					168				
48					169				
49					177				
50					178				
51					187				
52					192				
53					199				

Pointés.	Nombre.	Produits.	e	e^2	$e^2 \times$ nombre.
2p6 ×	3	7,8	+ 0,40	0,1600	0,4800
2,7	5	13,5	+ 0,30	0,0900	0,4500
2,8	21	58,8	+ 0,20	0,0400	0,8400
2,9	44	127,6	+ 0,10	0,0100	0,4400
3,0	53	159,0	+ 0,00	0,0000	0,0000
3,1	45	139,5	− 0,10	0,0100	0,4500
3,2	23	73,6	− 0,20	0,0400	0,9200
3,3	6	19,8	− 0,30	0,0900	0,5400
3,4	2	6,8	− 0,40	0,01600	0,3200
Sommes.	202	606,4			4,4400

$$m = 3{,}00, \qquad \varepsilon = 0{,}15, \qquad r = 0{,}10.$$

Nombre théorique	Nombre réel	des erreurs entre
53	53	− 0,05 et + 0,05
142	139	− 0,15 et + 0,15
186	183	− 0,25 et + 0,25
197	197	− 0,35 et + 0,35
202	202	− 0,45 et + 0,45

α Nombre théorique	β Nombre réel	des erreurs entre
53	53	− 0,05 et + 0,05
43	44	+ 0,05 et + 0,15
43	45	− 0,05 et − 0,15
22	21	+ 0,15 et + 0,25
22	23	− 0,15 et − 0,25
8	5	+ 0,25 et + 0,35
8	6	− 0,25 et − 0,35
2	3	+ 0,35 et + 0,45
2	2	− 0,35 et − 0,45

(Voir figure 7.)

17e Exercice.

Démontrer la formule $\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Solution : Elle se trouve dans tous les traités de calcul intégral.

18e Exercice.

Démontrer que la série

$$\int_0^T e^{-t^2} dt = Te^{-T^2}\left(1+\frac{p}{3}+\frac{p^2}{3.5}+\frac{p^3}{3.5.7}+\ldots+\frac{p^n}{3.5\ldots(2n+1)}+\ldots\right)$$

où $p = 2T^2$, *est convergente pour toute valeur finie de* T.

Solution : On démontrera cette série en intégrant par parties et considérant dt, plus généralement $t^{2n}\, dt$, comme différentielle exacte. On trouve ainsi immédiatement et successivement :

$$\int_0^T e^{-t^2} dt = Te^{-T^2} + 2\int_0^T e^{-t^2} t^2\, dt.$$

$$= Te^{-T^2}\left(1+\frac{2T^2}{3}\right) + \frac{2^2}{3}\int_0^T e^{-t^2} t^4\, dt$$

$$= Te^{-T^2}\left(1+\frac{2T^2}{3}+\frac{(2T^2)^2}{3.5}\right) + \frac{2^3}{3.5}\int_0^T e^{-t^2} t^6\, dt.$$

$$= Te^{-T^2}\left(1+\frac{(2T^2)}{3}+\frac{(2T^2)^2}{3.5}+\frac{(2T^2)^3}{3.5.7}\right) + \frac{2^4}{3.5.7}\int_0^T e^{-t^2} t^8\, dt$$

. . . .

$$= Te^{-T^2}\left(1+\frac{p}{3}+\frac{p^2}{3.5}+\frac{p^3}{3.5.7}+\ldots+\frac{p^n}{3.5.7\ldots(2n+1)}\right) + R$$

avec

$$R = \frac{2^{n+1}}{3.5.7\ldots(2n+1)}\int_0^T e^{-t^2} t^{2n+2} dt < \frac{2^{n+1}}{3.5.7\ldots(2n+1)}\int_0^T t^{2n+2} dt$$

ou

$$R < \frac{p^{n+1}}{3.5.7\dots(2n+1)} \cdot \frac{T}{2n+3}.$$

Lorsque n augmente indéfiniment, R tend vers zéro pour toute valeur finie de T. La série est donc démontrée. On voit de plus que si on s'arrête au terme de rang $(n+1)$, l'erreur commise est plus petite que ce terme multiplié par $\frac{2T^2 e^{T^2}}{2n+3}$.

Mais cette série a l'inconvénient de ne converger *rapidement* que pour $T < 1$.

19ᵉ Exercice.

Démontrer la formule de Laplace

$$\int_T^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{e^{-T^2}}{2T} \cdot \cfrac{1}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{2q}{1+\cfrac{3q}{1+\cfrac{4q}{1+\dots}}}}},$$

où $q = \frac{1}{2T^2}$.

Solution : En posant

$$u_0 = e^{t^2}\int e^{-t^2}\,dt,$$

et désignant les dérivées successives de u_0 relatives à t, par $u_1, u_2, \dots u_n$, on démontre facilement que

$$u_0 = -\frac{1}{2t} \cdot \frac{1}{1 - \frac{u_1}{u_0}\sqrt{\frac{q'}{2}}},$$

et généralement

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = -\frac{2n\sqrt{\frac{q'}{2}}}{1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\sqrt{\frac{q'}{2}}},$$

où $q' = \frac{1}{2t^2}\cdot$ De là résulte immédiatement le développement de $\int_T^\infty e^{-t^2}\,dt$ en fraction continue convergente. Les réduites successives convergent rapidement lorsque T est grand et la formule de Laplace convient alors très bien au calcul numérique de l'intégrale.

20e Exercice.

Démontrer la formule

$$(1)\quad \begin{cases} \int_T^\infty e^{-t^2}\,dt \\ = \frac{e^{-T^2}}{2T}\left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1.3}{p^2} - \frac{1.3.5}{p^3} \ldots \pm \frac{1.3\ldots(2n-1)}{p^n}\right) \mp R, \end{cases}$$

avec

$$p = 2T^2, \qquad R = \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2^{n+1}}\int_T^\infty e^{-t^2}\cdot\frac{dt}{t^{2n+2}}.$$

Solution : On procédera, comme dans le 18e exercice, par intégrations successives et par parties, en considérant $te^{-t^2}\,dt$ comme une différentielle exacte. Les termes de (1) vont d'abord en diminuant, puis ils augmentent aussitôt que $(2n-1)$ surpasse p. On ne peut donc supprimer R et remplacer le second membre de (1) par la série correspondante qui serait divergente pour toute valeur de T.

Néanmoins cette formule est très commode pour calculer $\int_T^\infty e^{-t^2}dt$ lorsque T est grand, surtout à cause de la petitesse du facteur $\frac{e^{-T^2}}{2T}\cdot$

Il suffit de s'arrêter, dans le calcul, à un terme assez petit ou d'une grandeur négligeable, puisque R est plus petit que ce terme.

Lorsque T est petit, la formule (1) ne convient nullement au calcul de l'intégrale. Il faut alors recourir à la formule de Laplace.

21e Exercice.

Construire une table donnant la probabilité P *pour que l'erreur d'une observation, de précision h, tombe entre $-x$ et $+x$.*

Solution : On sait que (n° 38 du Cours)

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hx} e^{-t^2}\, dt = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{hx}^{\infty} e^{-t^2}\, dt.$$

Si nous appelons r l'erreur probable d'une observation de précision h et si nous posons

$$hx = hr \cdot \frac{x}{r} = 0{,}4769363\, \frac{x}{r},$$

nous pourrons, avec l'argument $\frac{x}{r}$, réduire P en table applicable à toutes les valeurs de h, à la seule condition de rapporter les erreurs x d'une série quelconque de mesures à l'erreur probable r d'une mesure.

Pour hx plus petit que 1, on calculera l'intégrale $\int^{hx} e^{-t^2} dt$ par la série donnée au n° 38 du Cours ou par celle du 18e exercice. Pour hx plus grand que 1, on calculera l'intégrale $\int_{hx}^{\infty} e^{-t^2} dt$ par la formule de Laplace ou celle du 20e exercice. On trouve ainsi la table suivante :

$\frac{x}{r}$	P	Différ.	$\frac{x}{r}$	P	Différ.
0	0	54	2,5	0,908	13
0,1	0,054	53	2,6	0,921	10
0,2	0,107	53	2,7	0,931	10
0.3	0,160	53	2,8	0,941	9
0,4	0,213	51	2,9	0,950	7
0,5	0,264	50	3,0	0,957	6
0,6	0,314	49	3,1	0,963	6
0,7	0,363	48	3,2	0,969	5
0,8	0,411	45	3,3	0,974	4
0,9	0,456	44	3,4	0,978	4
1,0	0,500	42	3,5	0,982	3
1,1	0,542	40	3,6	0,985	2
1,2	0,582	37	3,7	0,987	3
1,3	0,619	36	3,8	0,990	1
1,4	0,655	33	3,9	0,991	2
1,5	0,688	31	4,0	0,993	1
1,6	0,719	29	4,1	0,994	1
1,7	0,748	27	4,2	0,995	1
1,8	0,775	25	4,3	0,996	1
1,9	0,800	23	4,4	0,997	1
2,0	0,823	20	4,5	0,998	0
2,1	0,843	19	4,6	0,998	0
2,2	0,862	17	4,7	0,998	1
2,3	0,879	16	4,8	0,999	0
2,4	0,895	13	4,9	0,999	0
2,5	0,908	13	5,0	0,999255	

Ainsi la probabilité qu'une erreur soit comprise entre $-5r$ et $+5r$ est 0,9992551, nombre déjà bien voisin de la certitude 1. En d'autres termes, sur 10 000 000 d'observations, on en trouvera 9 992 551 dont l'erreur tombe entre $-5r$ et $+5r$ et 7 449 dont l'erreur absolue dépasse ces limites; ou bien, il y a 1 343 à parier contre 1 que l'erreur ne sortira pas de ces limites.

22ᵉ Exercice.

APPLICATIONS DE LA TABLE PRÉCÉDENTE.

1° *On a tiré 100 coups de pistolet sur une cible. Il y a eu 4 écarts supérieurs à 40 centimètres. Quelle est l'erreur probable r d'un coup et le rayon y du cercle qui renferme les 30 coups les plus voisins du but?*

Solution : Le nombre des coups dont l'erreur x est inférieure à 40^c est $100 - 4 = 96$; c'est-à-dire que dans la série de 100 coups, la probabilité P pour un coup de porter à l'intérieur d'un cercle de 40^c est 0,96. Pour cette valeur de P, le table donne $\frac{x}{r} = 3{,}05$. Mais ici, $x = 40^c$; donc $r = \frac{40}{3{,}05} = 13^c{,}1$. L'erreur probable d'un coup est donc 13,1.

La probabilité pour un coup de porter à l'intérieur d'un cercle de rayon y est 0,30. Pour cette valeur de P, on trouve, par la table, $\frac{y}{r} = 0{,}573\ldots$, d'où $y = 7^c{,}5$.

On résoudra d'une manière analogue les exercices suivants :

2° *L'erreur probable d'un tireur à la cible est de* $12^c{,}33$. *Combien de ses coups sur* 100 *porteront de* 0 *à* 5^c, *de* 0 *à* 10^c, *de* 0 *à* 15^c, *de* 0 *à* 20^c, *de* 0 *à* 25^c, *de* 0 *à* 30^c, *de* 0 *à* 40^c, *de* 0 *à* 45^c *et combien au delà de* 45^c ?

Réponse : 22, 42, 59, 75, 84, 91, 97, 99, 100.

3° *Bradley a mesuré* 470 *fois une durée.* 39 *observations ont donné des écarts avec la moyenne de* $0^s{,}7$ *et au-dessus. Quelle est l'erreur probable d'une observation ?*

Réponse : $r = 0^s{,}27$.

4° *Connaissant l'erreur probable* $0^s{,}27$ *d'une observation précédente de Bradley, construire le tableau* (n° 31 du Cours) *de la production des erreurs dans une série de* 470 *observations ?*

L'accord entre la théorie et l'expérience est très remarquable.

5° *La taille moyenne en France est, chez les conscrits, de* $165^c{,}5$ *avec une erreur probable de* $\pm 4^c$. *Quel est, sur un contingent de* 140 000 *Français, le nombre des réformés pour défaut de taille au-dessous de* 156^c ?

Réponse : 7 530.

23^e Exercice.

Construire la courbe représentative du nombre y d'erreurs comprises entre 0 et x, dans une série de A observations, de précision h (fig. 8).

Solution : L'équation de la courbe est $y = \frac{A}{\sqrt{\pi}}\int_0^{hx} e^{-t^2}\,dt$. Si l'on développe l'intégrale en série, il est facile de voir que cette courbe a la forme $m'Om$, avec un point de rebroussement en O, origine des coordonnées. L'angle de rebroussement 2α est donné par la formule $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,h\,A$.

La parallèle à $x'x$, à la distance $\frac{1}{2}$ A, est une asymptote. La concavité est tournée vers le bas, car $\frac{dy}{dx}$ croît ou décroît sans cesse lorsque x croît en s'approchant ou en s'éloignant de zéro.

La courbe représentative de P a même forme; elle répond à $A = 1$.

24^e Exercice.

Démontrer la formule $\frac{K(K+1)(K+5)}{6}$, *donnée au* n° 57 du Cours *et représentant le nombre des quantités auxiliaires à former pour résoudre par la méthode des moindres carrés un système d'équations à K inconnues?*

Démonstration : Dans le système normal,

la 1re équation offre		$K+1$	coefficients,
2^e	id.	$(K-1)+1$	coefficients nouveaux,
3^e	id.	$(K-2)+1$	id.
....	....	....	....
K^e	id.	$1+1$	id.

ce qui fait en tout

$$K + \tfrac{1}{2}(K+1)K = \tfrac{3}{2}K + \tfrac{1}{2}K^2.$$

Comme nous passons du système normal à un autre ayant (K — 1) inconnues, de celui-ci à un troisième ayant (K — 2) inconnues, et ainsi de suite jusqu'au dernier système qui n'a qu'une seule inconnue, nous aurons à calculer un nombre de quantités égal à

$$\tfrac{3}{2}(1 + 2 + 3 + \dots + K) + \tfrac{1}{2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + K^2)$$

ou à

$$\tfrac{3}{2}(K+1)\frac{K}{2} + \tfrac{1}{2}\frac{(2K+1)(K+1)K}{6} = \frac{K(K+1)(K+5)}{6}.$$

25e Exercice.

Après avoir tiré à la cible, on efface le point visé, mais on relève les traces des balles qui restent seules visibles. Quel est le point visé le plus probable, en supposant qu'il n'existe pas d'erreurs systématiques?

Solution : Soient $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$, ..., $x_m y_m$ les coordonnées des diverses balles rapportées à deux axes rectangulaires tracés sur la cible et x, y les coordonnées inconnues du point visé. On aura pour les deux systèmes d'équations de condition

(1) $\quad x = x_1, \quad x = x_2, \quad x = x_3, \quad \dots, \quad x = x_m.$

(2) $\quad y = y_1, \quad y = y_2, \quad y = y_3, \quad \dots, \quad y = y_m.$

Si les balles sont toutes tirées avec la même précision, c'est-à-dire avec la même arme, par le même tireur..., en un mot dans les mêmes conditions, les systèmes (1) et (2) donneront respectivement pour les valeurs les plus probables de x et y

$$x = \frac{1}{m}(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_m),$$

$$y = \frac{1}{m}(y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_m),$$

c'est-à-dire, pour point visé le plus probable, le centre de gravité des points touchés par les balles.

Si les conditions de tir ne sont pas les mêmes pour toutes les balles, à cause du changement d'arme, de tireur ou pour toute autre cause et si l'on désigne par $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m$ les poids respectifs pour chaque coup, on aura

$$x = \frac{1}{s}(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_m x_m),$$

$$y = \frac{1}{s}(p_1 y_1 + p_2 y_2 + \ldots + p_m y_m),$$

en posant

$$s = p_1 + p_2 + \ldots + p_m.$$

REMARQUE.

Les observations astronomiques peuvent être comparées à un tir à la cible dont le point de mire est effacé ultérieurement. Si on porte sur une carte céleste les positions d'un même astre fixe observé un grand nombre de fois, on déterminera la position la plus probable de cet astre, exactement comme dans l'exercice précédent on détermine le point visé le plus probable O′ sur un carton de cible, en faisant, dans les deux cas, abstraction des erreurs systématiques possibles.

Lorsque le point de mire O du carton est effacé, rien ne peut faire découvrir l'erreur systématique du tir. Mais si ce point n'était pas effacé, elle serait représentée en grandeur et en direction par la droite OO′.

De même rien ne peut faire découvrir les erreurs systématiques d'une série d'observations d'un astre dont la position n'est pas connue d'ailleurs exactement. Mais si cette position exacte est donnée, sa différence avec la position la plus probable conclue de la série fournit l'erreur systématique totale de cette série.

En multipliant sur une même cible les séries de tir et changeant, à chaque série, soit l'arme, soit le tireur ou les deux à la fois, d'une manière fortuite, l'erreur systématique particulière à chaque série deviendra une erreur accidentelle dans l'ensemble des séries. Le point visé le plus probable résultant de cet ensemble différera très peu du véritable point de mire. Si ce point a été effacé, après la

totalité du tir, on pourra donc le retrouver très approximativement et déterminer, par suite, l'erreur systématique de chaque série individuelle.

En multipliant les séries d'observation d'un même astre et changeant, à chaque série, soit l'instrument, soit l'observateur, soit le lieu, simultanément ou séparément, l'erreur systématique particulière à chaque série deviendra une erreur accidentelle dans l'ensemble des séries. La position la plus probable de l'astre résultant de cet ensemble pourra être considérée comme la position vraie et permettra de déterminer l'erreur systématique de chaque série individuelle d'observations.

26e Exercice.

Calculer les valeurs les plus probables de x, y, z vérifiant les équations suivantes, dont les derniers termes sont donnés par l'observation

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{llll} 3{,}6x & +\,2{,}5y & -\,4{,}2z & -\,5{,}2 = 0, \\ 4{,}8 & -\,1{,}7 & +\,5{,}3 & +\,2{,}1 = 0, \\ 6{,}4 & +\,0{,}9 & +\,3{,}6 & -\,0{,}8 = 0, \\ 1{,}7 & -\,6{,}4 & +\,8{,}1 & +\,7{,}3 = 0, \\ 3{,}6 & -\,3{,}2 & +\,5{,}9 & +\,3{,}7 = 0, \\ 4{,}9 & +\,1{,}8 & -\,2{,}7 & -\,4{,}4 = 0, \\ 5{,}6 & +\,3{,}9 & -\,4{,}2 & -\,6{,}7 = 0, \\ 4{,}0 & +\,5{,}2 & -\,6{,}7 & -\,8{,}2 = 0, \\ 2{,}5x & +\,7{,}6y & -\,3{,}2z & -\,6{,}7 = 0. \end{array}\right.$$

Calculer également : 1° l'erreur moyenne d'une observation; 2° l'erreur moyenne d'une inconnue.

Solution : Application de la méthode des moindres carrés.

FORMATION DES ÉQUATIONS NORMALES.

On a successivement :

1° Équation en x :

$$\begin{array}{rrrrl}
12{,}96x & +\ 9{,}0\ y & -15{,}12\,z & -\ 18{,}72 & =0, \\
23{,}04 & -\ 8{,}16 & +25{,}44 & +\ 10{,}08 & =0, \\
40{,}96 & +\ 5{,}76 & +23{,}04 & -\ 5{,}12 & =0, \\
2{,}89 & -10{,}88 & +13{,}77 & +\ 12{,}41 & =0, \\
12{,}96 & -11{,}52 & +21{,}24 & +\ 13{,}32 & =0, \\
24{,}01 & +\ 8{,}82 & -13{,}23 & -\ 21{,}56 & =0, \\
31{,}36 & +21{,}84 & -23{,}52 & -\ 37{,}52 & =0, \\
16{,}00 & +20{,}80 & -26{,}80 & -\ 32{,}80 & =0, \\
6{,}25x & +19{,}00 & -\ 8{,}00 & -\ 16{,}75 & =0, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\
170{,}43x & +85{,}22 & +83{,}49 & +\ 35{,}81 & \\
 & -30{,}56 & -86{,}67 & -132{,}47 & \\
 & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots &
\end{array}$$

(X) $$170{,}43x + 54{,}66y - 3{,}18z - 96{,}66 = 0.$$

2° Équation en y :

$$\begin{array}{rrr}
6{,}25y & -\ 10{,}50z & -\ 13{,}0\ , \\
2{,}89 & -\ 9{,}01 & -\ 3{,}57, \\
0{,}81 & +\ 3{,}24 & -\ 0{,}72, \\
40{,}96 & -\ 51{,}84 & -\ 46{,}72, \\
10{,}24 & -\ 18{,}88 & -\ 11{,}84, \\
3{,}24 & -\ 4{,}86 & -\ 7{,}92, \\
15{,}21 & -\ 16{,}38 & -\ 26{,}13, \\
27{,}04 & -\ 34{,}84 & -\ 42{,}64, \\
57{,}76y & -\ 24{,}32 & -\ 50{,}92, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
 & +\ 3{,}24 & \\
164{,}40y & -170{,}63 & -203{,}46, \\
 & \ldots\ldots & \\
 & 167{,}39z &
\end{array}$$

(Y) $$54{,}66x + 164{,}40y - 167{,}39z - 203{,}46 = 0.$$

3° Équation en z :

$$\begin{array}{rcr}
17,64z & + & 21,84 \\
28,09 & + & 11,83 \\
12,96 & - & 2,88 \\
65,21 & + & 59,13 \\
34,81 & + & 21,83 \\
7,29 & + & 11,88 \\
17,64 & + & 28,14 \\
44,89 & + & 54,94 \\
10,24z & + & 21,44 \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
 & - & 2,88 \\
239,17z & + & 230,33 \\
 & & \cdots \\
 & + & 227,45
\end{array}$$

$$\text{(Z)} \qquad -3,18x - 167,39y + 239;17z + 227,45 = 0.$$

D'où le système d'équations normales :

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} 170,43x + 54,66y - 3,18z = 96,66, \\ 54,66x + 164,40y - 167,39z = 203,46, \\ 3,18x + 167,39y - 239,17z = 227,45. \end{cases}$$

Pour la suite du calcul, il est avantageux de résoudre ces équations par les formules de Cramer. Soient :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 170,43 & 54,66 & -3,18 \\ 54,66 & 164,40 & -167,39 \\ 3,18 & 167,39 & -239,17 \end{vmatrix} = -1.267.839,63,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 96,66 & 54,66 & -3,18 \\ 203,46 & 164,40 & -167,39 \\ 227,45 & 167,39 & -239,17 \end{vmatrix} = -503.434,19,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 170,43 & 96,66 & -3,18 \\ 54,66 & 203,46 & -167,39 \\ 3,18 & 227,45 & -239,17 \end{vmatrix} = -628.184,09,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 170,43 & 54,66 & 96,66 \\ 54,66 & 164,40 & 203,46 \\ 3,18 & 167,39 & 227,45 \end{vmatrix} = +758.213,82,$$

(II) $$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta},$$

ou

(III) $$\left\{ \begin{aligned} x &= +\ 0{,}397, \\ y &= +\ 0{,}495, \\ z &= -\ 0{,}598. \end{aligned} \right.$$

ERREURS MOYENNES D'UNE OBSERVATION ET DES INCONNUES.

Soient :

$\mathcal{E}_1$ l'erreur moyenne d'une observation;
$\mathcal{E}$ l'erreur individuelle de chaque observation.

On a

(IV) $$\mathcal{E}_1 = \pm \sqrt{\frac{[\mathcal{E}\mathcal{E}]}{m-i}},$$

où $m =$ nombre d'observations;
$i =$ nombre d'inconnues.

Soient, en outre, $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$ les erreurs moyennes des inconnues x, y, z. On a (COURS n° 59) :

(V) $$\left\{ \begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_x^2}{\mathcal{E}_1^2} &= Q_x = \frac{1}{p_x}, \\ \frac{\mathcal{E}_y^2}{\mathcal{E}_1^2} &= Q_y = \frac{1}{p_y}, \\ \frac{\mathcal{E}_z^2}{\mathcal{E}_1^2} &= Q_z = \frac{1}{p_z}. \end{aligned} \right.$$

1° Calcul de $\mathcal{E}_1$: On peut obtenir $[\mathcal{E}\mathcal{E}]$ de deux manières : soit par substitution, de x, y, z dans les équations (1); soit à l'aide de la formule suivante :

$$[\mathcal{E}\mathcal{E}] = [nn] + x\,[an] + y\,[bn] + z\,[cn],$$

où nous désignons généralement par a, b, c, n les coefficients des inconnues et le terme tout connu dans ces équations.

Le calcul précédent nous a fait connaître :

$$\begin{aligned} [an] &= -\ \ 96{,}66, &\text{d'où}\quad x\,[an] &= -\ \ 38{,}374, \\ [bn] &= -\ 203{,}46, &\ldots\quad y\,[bn] &= -\ 100{,}712, \\ [cn] &= +\ 227{,}45, &\ldots\quad z\,[cn] &= -\ 135{,}773. \end{aligned}$$

D'ailleurs,

$$[nn] = +\ 275{,}45.$$

Donc :

$$[\mathcal{E}\mathcal{E}] = +\ 0{,}59.$$

Cette valeur de $[\mathcal{E}\mathcal{E}]$ substituée dans (IV) où

$$\left\{ \begin{array}{l} m = 9 \\ i = 3 \end{array} \right. ,$$

donne

$$\text{(VI)} \qquad \mathcal{E}_1 = \pm \sqrt{\frac{0{,}59}{6}} = \pm\ 0{,}31.$$

2° **Calcul de** $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$: Pour obtenir les quantités Q_x, Q_y, Q_z, il suffit de résoudre respectivement les trois systèmes d'équations suivants :

$$\text{(VII)} \left\{ \begin{array}{rl} 170{,}43\, Q_x + \ \ 54{,}66\, Q_y - \ \ \ 3{,}18\, Q_z = 1, & = 0, \quad = \ \ \ 0, \\ 54{,}66\, Q_x + 164{,}40\, Q_y - 167{,}39\, Q_z = 0, & = 1, \quad = \ \ \ 0, \\ 3{,}18\, Q_x + 167{,}39\, Q_y - 239{,}17\, Q_z = 0, & = 0, \quad = -1. \end{array} \right.$$

Le premier système doit être résolu par rapport à Q_x, le second par rapport à Q_y, le troisième par rapport à Q_z. On a ainsi, à l'aide des formules de Cramer,

$$\text{(VIII)} \left\{ \begin{array}{l} Q_x = \dfrac{\left\{ \begin{array}{rrr} 1 & 54{,}66 & -\ \ 3{,}18 \\ 0 & 164{,}40 & -167{,}39 \\ 0 & 167{,}39 & -239{,}17 \end{array} \right\}}{\Delta} = +\dfrac{11.300{,}44}{1.267.839{,}63} = 0{,}009, \\[2ex] Q_y = \dfrac{\left\{ \begin{array}{rrr} 170{,}43 & 0 & -\ \ 3{,}18 \\ 54{,}66 & 1 & -167{,}39 \\ 3{,}18 & 0 & -239{,}17 \end{array} \right\}}{\Delta} = +\dfrac{40.771{,}86}{1.267.839{,}63} = 0{,}032, \\[2ex] Q_z = \dfrac{\left\{ \begin{array}{rrr} 170{,}43 & 54{,}66 & 0 \\ 54{,}66 & 164{,}40 & 0 \\ 3{,}18 & 167{,}39 & -1 \end{array} \right\}}{\Delta} = +\dfrac{25.030{,}97}{1.267.839{,}63} = 0{,}019. \end{array} \right.$$

Comme il est facile de le voir, tous les éléments de Q_x, Q_y, Q_z sont fournis par la résolution des équations normales. L'avantage des formules de Cramer consiste donc à donner Q_x, Q_y, Q_z sans nouveaux calculs quand x, y, z ont été préalablement déterminés.

En substituant dans (V) les valeurs de $\mathcal{E}_1$, Q_x, Q_y, Q_z, on a facilement :

$$\text{(IX)} \qquad \begin{cases} \mathcal{E}_x = \pm\, 0{,}029, \\ \mathcal{E}_y = \pm\, 0{,}056, \\ \mathcal{E}_z = \pm\, 0{,}043. \end{cases}$$

27^e Exercice.

Application de la méthode de Cauchy à la question précédente.

FORMATION DES ÉQUATIONS NORMALES.

$$\text{(I)} \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrl} 3{,}6x & + & 2{,}5y & - & 4{,}2z & - & 5{,}2 & = 0, \\ 4{,}8 & - & 1{,}7 & + & 5{,}3 & + & 2{,}1 & = 0, \\ 6{,}4 & + & 0{,}9 & + & 3{,}6 & - & 0{,}8 & = 0, \\ 1{,}7 & - & 6{,}4 & + & 8{,}1 & + & 7{,}3 & = 0, \\ 3{,}6 & - & 3{,}2 & + & 5{,}9 & + & 3{,}7 & = 0, \\ 4{,}9 & + & 1{,}8 & - & 2{,}7 & - & 4{,}4 & = 0, \\ 5{,}6 & + & 3{,}9 & - & 4{,}2 & - & 6{,}7 & = 0, \\ 4{,}0 & + & 5{,}2 & - & 6{,}7 & - & 8{,}2 & = 0, \\ 2{,}5x & + & 7{,}6y & - & 3{,}2z & - & 6{,}7 & = 0, \\ \hline 37{,}1x & + & 21{,}9 & + & 22{,}9 & + & 13{,}1 & \\ & - & 11{,}3 & - & 21{,}0 & - & 32{,}0 & = 0, \\ \hline & + & 10{,}6y & + & 1{,}9z & - & 18{,}9 & \end{array} \right.$$

$$\text{(1)} \qquad 37{,}1x + 10{,}6y + 1{,}9z = 18{,}9.$$

Ou, en divisant les deux membres par 37,1,

$$(a) \qquad x + \frac{10{,}6}{37{,}1}\,y + \frac{1{,}9}{37{,}1}\,z = \frac{18{,}9}{37{,}1}.$$

En multipliant successivement les deux membres de l'équation (a)

par les coefficients de x dans les équations (I) et retranchant chacune des équations obtenues des équations correspondantes (I), on aura le système suivant ne renfermant plus que y et z comme inconnues :

$$
\text{(II)}\quad \left\{
\begin{array}{rlrlrl}
5,459 & y & -16,266 & z & = & +12,488, \\
-11,395 & & +18,751 & & = & -16,863, \\
-3,445 & & +12,140 & & = & -9,128, \\
-25,546 & & +29,728 & & = & -30,296, \\
-15,688 & & +21,205 & & = & -20,531, \\
1,484 & & -10,948 & & = & +7,063, \\
8,533 & & -15,646 & & = & +14,273, \\
15,052 & & -25,617 & & = & +22,862, \\
25,546 & y & -12,347 & z & = & +20,132, \\
\dots & & \dots & & & \dots \\
\left.\begin{array}{r} +56,074 \\ -56,074 \end{array}\right\} & y & \left.\begin{array}{r} +81,824 \\ -81,824 \end{array}\right\} & z & = & \begin{array}{r} +76,818, \\ -76,818. \end{array}
\end{array}
\right.
$$

En remarquant que la somme des coefficients est nulle dans chaque colonne de (II), on voit que le calcul en est exact. En rendant positifs tous les coefficients de y et ajoutant membre à membre, on a

$$(2)\qquad 112,148\,y - 163,648\,z = 153,636,$$

ou

$$(b)\qquad y - 1,4592\;z = 1,3699.$$

En éliminant y entre (b) et chacune des équations (II) on aura :

$$
\text{(III)}\quad \left\{
\begin{array}{rl}
1,5184\,z & = -0,9177, \\
0,1863 & = -0,1099, \\
2,0647 & = -1,2797, \\
0,2955 & = -0,1840, \\
0,1075 & = -0,0612, \\
5,9181 & = -3,3895, \\
0,3744 & = -0,3029, \\
0,2427 & = -0,1489, \\
0,9759\,z & = -0,5818, \\
\dots & \dots \\
11,6835\,z & = -6,9756,
\end{array}
\right.
$$

$$(3)\qquad 11,6835\,z = -6,9756,$$

$$(c)\qquad z = -0,597.$$

On a donc finalement à résoudre le système suivant :

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} & z = -0{,}597 \\ & y - 1{,}4592\,z = 1{,}3699 \\ x + 0{,}3857\,y + 0{,}0512\,z = 0{,}5094 \end{cases}$$

qui donne

$$\text{(V)} \qquad x = +0{,}397, \qquad y = +0{,}493, \qquad z = -0{,}597.$$

La méthode des moindres carrés avait donné

$$x = +0{,}397, \qquad y = +0{,}495, \qquad z = -0{,}598.$$

LIVRE II

MÉTHODES GÉNÉRALES D'OBSERVATION

CHAPITRE I

Cercles divisés.

Nous allons donner quelques détails sur la construction et l'usage de la machine à diviser les cercles *(fig. 9)*, exécutée par M. Secrétan.

MACHINE A DIVISER LES CERCLES.

1° **Construction.** — I. Un pied massif en fonte P *(fig. 9)*, supporté par des vis calantes *i*, se termine par un cercle ou plutôt par une couronne circulaire massive B. Ce pied est percé verticalement, sur une grande profondeur, d'un trou cylindrique dans lequel s'engage, à frottement doux et parfaitement ajusté, l'axe d'une couronne circulaire A, analogue à B. Le cercle A est relié à son axe par des rayons et peut tourner autour de lui, soit à la main pour les grands mouvements, soit à l'aide d'une vis de rappel et de pression pour les petits mouvements. Cette vis *α* est établie sur une pièce solidaire de P. Sur B reposent quatre vis V, sur lesquelles on règle, à hauteur voulue, le châssis C qui porte le tracelet *t*. Ce tracelet se fixe sur les branches parallèles du châssis, à la distance voulue de l'axe de rotation de A et en face de cet axe.

La première opération consiste à graduer le cercle A. Pour cela, on peut procéder de la manière suivante *(fig. 10)* :

Imaginons deux microscopes M, M′ supportés par B et marquons sur de petites plaques d'argent, posées provisoirement sur A, deux points *a* et *b* sous l'axe optique ou le fil mobile de ces microscopes. Si *a* et *b* sont diamétralement opposés et si, par une rotation de A,

on amène a sous le fil de M', b viendra sous celui de M et réciproquement. Si cela n'a pas lieu, on déplacera b peu à peu, dans le sens convenable, jusqu'à ce que cette condition soit remplie, ayant soin de mettre à chaque fois sur b le fil mobile de M'. On n'aura pas besoin de déranger le microscope M' lui-même, s'il a été d'abord placé, aussi bien que possible, diamétralement opposé à M.

Cela fait après de longs tâtonnements, on peut marquer les deux premiers traits 0°, 180° du cercle. Pour ceci, a et b étant sous les fils de M et M', on trace le trait 0° avec le tracelet t; puis on amène a sous M', b sous M et on trace le trait 180° avec le même tracelet immobile sur C. Après quoi on peut, si l'on veut, car ce n'est pas indispensable mais c'est plus régulier, ramener a et b à leurs positions primitives.

Il faut ensuite diviser l'arc ab en deux parties égales. Pour cela, soit un troisième microscope mobile M" placé sur B à peu près à 90° de M et M'. Si un trait c est placé sous son fil à 90° exactement de a et b, et si l'on amène c en a, b devra venir exactement sous le fil de M". Après quelques tâtonnements, on trouvera donc la position de c divisant exactement ab en deux parties égales. Si alors on mène c en a, t marquera le trait 90°; puis si l'on amène c en b, t marquera 270°. Mais on peut faire tourner le cercle d'autant de quadrants successifs qu'on voudra et présenter au tracelet les traits 0, 90, 180, 270, 0°,... indéfiniment et dans le même sens par le procédé suivant qui est général.

Supposons a, b, c en leurs positions primitives sous les fils de M, M', M". Imaginons une alidade L, bien centrée sur le cercle A et pouvant s'y fixer au moyen d'une vis de pression et de rappel β. Imaginons, en outre, deux vis v, v' fixées sur B. Amenons en contact avec v l'alidade L, le cercle A étant immobile, et effectuons ce contact en nous servant de la vis β; puis, avec la vis α, par rotation de A, amenons c en a; alors L ayant pris la position L', amenons v' en contact avec L'. Cela fait, ne touchons plus à v ni v', mais desserrons la vis de pression β de L et ramenons cette alidade en contact avec v, le cercle A restant immobile. Ensuite ramenons le système A, L en contact, en L', avec v'; le cercle A aura tourné d'un nouveau quadrant et ainsi de même indéfiniment. A chaque contact en v', t peut passer de nouveau et successivement dans l'un des quatre traits déjà tracés.

On voit maintenant la suite de l'opération. Supposons a, b, c remis à leurs places primitives, a sous M. Pour diviser l'arc ac en deux parties égales, on disposera M', à peu près à moitié, entre M et M" et par tâtonnements, comme précédemment, on trouvera le milieu d; puis on fera marcher, sous le tracelet, le cercle A de ad, huit fois, au moyen de l'alidade L, après avoir fixé de nouveau convenablement v et v' sur B et ainsi de suite. On aura donc :

2 traits répondant à		0° et 180°;
4	—	0°, 90, 180, 270;
8	—	0°, 45°, 90°, ..., 270, 315;
16	—	0°, 22° 30′, 45°, ...;
32	—	0°, 11° 15′, 22° 30′, ...;
64	—	0°, 5° 37′ 30″, 11° 15′, ...;
128	—	0°, 2° 48′ 45″, 5° 37′ 30″, ...

On divise les intervalles de 2°48′45″ de 5″ en 5″, chacun en particulier, au moyen d'une bonne vis micrométrique ordinaire.

Pour tracer les 128 premiers traits fondamentaux, il faut que les contacts de L en v et v' se fassent toujours de la même manière et avec une grande précision. Pour cela, l'alidade L porte, à chaque extrémité, un *comparateur (fig. 11),* qui n'est autre qu'un levier dont une branche très petite est coudée à angle droit et l'autre branche f, très longue, est disposée verticalement; l'extrémité de cette dernière se meut sur un petit arc divisé m'. On met v en contact avec L par l'extrémité horizontale de la petite branche coudée et on note la division de m' alors marquée par la branche f, tenue en équilibre sur m' sous la pression de v et celle d'un petit ressort ρ. Chaque fois qu'on établit le contact de v avec L, f doit marquer la même division de m'.

II. Une fois que le cercle A est divisé, on peut reporter ses divisions sur tout autre cercle ainsi qu'il suit :

Imaginons, au centre de A et porté par son axe, un petit plateau circulaire sur lequel on puisse déposer le cercle a à diviser *(fig. 12).* Centrons d'abord exactement a. Pour cela, on place l'extrémité inférieure de la petite branche d'un comparateur, analogue à celui que nous venons de décrire, en contact avec la face interne de l'anneau d'ajustement b du cercle, la branche f étant verticale. Puis on fait

tourner A; *f* doit rester immobile pendant cette rotation si *a* est bien centré sur l'axe de A; on y arrive par tâtonnements. Avec un comparateur horizontal, on s'assure ensuite, d'autre part, que le plan du limbe *a* est bien parallèle à celui de A, pour que les traits soient également profonds et espacés. Enfin on colle *a* sur le plateau avec un mélange fondu de cire et de colophane.

Pour graduer *a*, il n'y a plus qu'à amener successivement les traits de A sous les microscopes M, M′ et à tracer à chaque fois sur *a* le trait correspondant. Cette méthode, dite *par coïncidence,* est longue. Elle exige quatre ou cinq jours de travail pendant lesquels *a* peut se déranger; en outre le pointage de chaque trait de A au microscope finit par fatiguer rapidement l'œil et devenir une autre source d'erreurs. On préfère la méthode suivante, plus expéditive, moins fatigante et plus exacte, mais qui exige la construction d'un organe complémentaire de la machine.

III. Après avoir divisé A, on pratique sur le bord extérieur de ce cercle un engrenage très régulier, et on conduit cet engrenage par une vis tangente très régulière aussi, tournant sur elle-même et gouvernée par la petite manivelle *m (fig. 9).*

Pour tailler un engrenage régulier, on fixe sur B un ciseau, analogue à ceux qui servent à tailler les vis; puis on fait, au moyen de *α* et des microscopes, avancer A de 20′ en 20′ devant ce ciseau qui, à chaque fois, creuse une entaille dans A; on fait faire ainsi un tour à A, qui est dès lors muni de 1 080 entailles ou dents correspondantes. Si on faisait avancer le cercle seulement de 10′ en 10′, on aurait 2 160 dents.

Mais on n'achève pas de creuser les entailles d'un seul coup et au premier tour. On les creuse peu à peu et fort lentement, en ajustant après chaque tour la vis qui doit gouverner, jusqu'à ce qu'elle s'engage exactement et avec précision dans les dents de la couronne A.

On arrive ainsi à construire une denture et une vis tangente d'une étonnante perfection. Dès lors un tour de *m* fait avancer A d'une dent, c'est-à-dire de 10′ ou 5′. D'ailleurs la vis tangente, en partie masquée dans le dessin, porte à sa tête un *compteur,* c'est-à-dire un tambour divisé, avec roue à rochet et butoir, comme dans la machine à diviser de Perraud. Si on tourne *m* dans un sens, la vis avance et entraîne A de la quantité parcourue par le butoir entre deux arrêts

fixés *a priori* d'après la valeur désirée de cette quantité; si on tourne ensuite *m* en sens contraire, grâce à la roue à rochet, la vis et A restent en place. On ramène ainsi *m* au point de départ et ainsi de suite.

2° **Usage.** — La perfection de cet outillage est si grande, on peut régler le compteur si bien, que les traits successifs de A viennent tomber exactement sous le fil des microscopes M, M', après chaque course de la vis tangente ou de *m*. Lorsqu'on a constaté cette coïncidence aux deux microscopes M, M' pour cinq ou six traits, on peut être assuré des autres et il n'y a plus, après chaque propulsion de *m*, qu'à tracer le trait correspondant sur *a*. Pour cela on tourne la manivelle *n* qui gouverne le tracelet. Ainsi, lorsque tout est bien réglé, un seul ouvrier, conduisant d'une main *m*, de l'autre *n*, peut diviser *a* en cinq ou six heures. La précision de cette manœuvre est si grande que souvent le premier trait vient se placer, à la fin de l'opération, exactement sous le tracelet qui, en opérant de nouveau, ne ferait qu'approfondir ce trait et l'élargir un peu sans le déplacer.

CONSTRUCTION DES CERCLES DIVISÉS.

1° **Préparation du limbe et de l'axe de rotation.** — On exécute d'abord soigneusement au tour le limbe *a*, sa gorge *b* et l'axe de rotation R (*fig. 12*). On ajuste très exactement cet axe dans la gorge *b* et perpendiculairement au limbe. On termine en tournant solidairement le limbe *a* et l'axe R, comme une seule pièce sur un même tour, au moyen d'outils fixes qui servent : les uns à rendre le limbe et les tourillons de R bien circulaires, bien centrés; les autres à rendre la surface du limbe, qu'il s'agit de diviser, bien de révolution autour de R, quelle que soit sa forme, plane ou légèrement conique.

On sépare ensuite le limbe *a* de son axe R, pour le placer plus commodément sur le plateau de la machine à diviser.

2° **Division du cercle.** — Nous avons expliqué cette division en faisant connaître la construction et la manœuvre de la machine à diviser.

3° Lorsque le cercle est divisé, on l'ajuste de nouveau et définitivement sur son axe de rotation.

CHAPITRE II

Nivellements.

NIVEAU A PERPENDICULE OU DES MAÇONS.

Description. — Le niveau à perpendicule *(fig. 13)* se compose essentiellement de deux règles de bois, assemblées ordinairement à angle droit et d'égale longueur AC, BC. La ligne AB se nomme *la ligne de foi*. Un perpendicule ou fil à plomb est fixé au point C, sommet de l'angle et centre d'un arc de cercle gradué ab. Le zéro de la graduation est à l'une des extrémités a de cet arc de cercle.

Théorie. — Lorsque le niveau ACB est placé sur une droite RR′ horizontale, la ligne de foi AB est horizontale; le fil à plomb CV, ayant une direction verticale, est perpendiculaire à la ligne de foi RR′ et détermine sur l'arc ab une division r.

Si l'on connaît le point r, il est facile de déterminer l'inclinaison φ d'une règle RR′ sur l'horizon. On place le niveau ACB sur cette règle. La droite Cr étant perpendiculaire à RR′, le fil à plomb Cp prend la direction CV verticale et détermine sur l'arc ab une division m. Si nous désignons par m et r les nombres de degrés déterminés, sur la graduation, par les points m et r, les angles φ et VCI, égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires, sont mesurés par l'arc mr et l'on a

$$\varphi = r - m.$$

Mais si l'on ne connaît pas r, pour le déterminer ou l'éliminer, on retourne le niveau. B vient en B′, A en A′, m en m' et le fil à plomb, dans la nouvelle position du niveau, gardant toujours la même direction verticale C′V, détermine une division n. Il est facile de voir

que n est symétrique de m par rapport à r, car les deux angles $m'C'r'$, $nC'r$ sont égaux à φ. On a donc

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(n - m), \qquad r = \tfrac{1}{2}(m + n).$$

Le point r étant ainsi déterminé, on pourra le prendre pour le zéro de la graduation. On aura alors l'inclinaison d'une droite, sans retournement, en prenant l'arc mr ou nr. On ne se sert cependant pas du point r, car une foule de causes peuvent déranger la position de ce point. Pour mesurer l'inclinaison d'une droite RR′ on emploiera toujours la méthode du retournement et la formule $\varphi = \frac{1}{2}(n - m)$.

Nivellement. — Pour rendre horizontale une droite RR′ mobile autour d'une de ses extrémités R, il suffira d'élever ou d'abaisser R′ jusqu'à ce que le fil à plomb tombe en r, ou mieux au milieu de l'arc mn déterminé par le retournement.

Le lecteur voit aussi qu'un niveau à perpendicule porté par un axe de rotation, monté lui-même sur trois vis calantes, permet de rendre vertical cet axe, en opérant comme nous l'avons dit, dans le COURS, pour le niveau à bulle d'air.

REMARQUE.

La manœuvre du retournement qui nous a donné le point r est journellement employée par les ouvriers et les artistes. C'est le type des *opérations conjuguées*. Leur but est de faire connaître l'état des instruments, les erreurs qu'ils peuvent donner, de les éliminer ou de les évaluer.

NIVEAU A BULLE D'AIR.

Le niveau à bulle d'air n'est pas autre chose qu'un niveau à perpendicule retourné dont le centre est en bas. La bulle remplace la balle de plomb et se meut sur son arc de cercle comme la balle sur le sien. La sensibilité de ces deux niveaux augmente avec le rayon de leur arc de cercle. La grande supériorité du niveau à bulle d'air tient à ce qu'on peut donner à son rayon une très grande longueur, plusieurs centaines de mètres, sans lui rien ôter de sa commodité;

tandis qu'il serait difficile de manier un niveau à perpendicule dont le fil aurait seulement une dizaine de mètres.

Construction du tube. — Dans la théorie du niveau à bulle (nº 136 du COURS), nous avons supposé que la coupe intérieure du tube était exactement circulaire. Voici les divers moyens que l'on a employés jusqu'à ce jour pour obtenir un tel tube :

1º Primitivement on prenait un tube cylindrique AB et on le chauffait à la lampe jusqu'à ce que le verre fût ramolli. On le suspendait alors par ses deux extrémités A et B. Le tube ramolli, sous l'action de la pesanteur, se déformait légèrement et prenait la forme A'B' *(fig. 14)* qui n'est pas circulaire. Aussi l'on pouvait avec ces tubes grossiers vérifier l'horizontalité d'une droite, mais non mesurer son inclinaison.

2º Plus tard, on prit une tige en fer cylindrique, de rayon un peu moindre que celui du tube. On garnissait cette tige d'émeri, on l'introduisait dans le tube et on frottait. Il y avait usure de la tige et du tube, suivant deux courbes qui s'appliquaient exactement l'une sur l'autre dans toutes leurs parties et qui, par suite, étaient des arcs de cercle de même rayon. Mais le frottement ne s'effectuant pas toujours dans le même sens, on n'obtenait jamais des arcs de cercle parfaits. De plus l'on n'avait, par ce procédé, que des arcs de cercle d'un rayon donné par le hasard.

3º Actuellement, on taille à l'avance la tige de fer en arc de cercle d'un rayon déterminé, de telle sorte que 1^{mm} de la division du tube réponde à $1''$, $5''$, $10''$ ou que le rayon de cet arc soit 500^m, 100^m, 50^m. Cette tige, ainsi taillée, prend le nom de *calibre;* et, par frottement avec le calibre, on obtient dans le tube un arc de cercle presque parfait.

Comme le rayon de cet arc est excessivement grand, il a fallu, pour tracer le calibre, résoudre le problème suivant : *Tracer un arc de cercle de rayon donné, sur une corde donnée, sans recourir au centre.* On se sert généralement pour cela d'un compas spécial.

La flèche x de l'arc de cercle d'un calibre, décrit sur une corde $2d$, avec le rayon R, est évidemment donnée par la formule

$$x = R - \sqrt{R^2 - d^2}.$$

La corde $2d$ du calibre se confond sensiblement avec la longueur $2l$

qu'on veut lui donner, vu la petitesse de cette longueur relativement à R *(fig. 15)*. D'ailleurs R se calcule par la formule

$$R = \frac{\lambda}{s''},$$

si l'on veut que la longueur λ d'une division du niveau réponde à un angle de s''. La flèche du calibre de longueur $2l$, pouvant donner un niveau dont la bulle marche d'une division égale à λ, lorsque l'inclinaison varie de s'', est donc fournie et calculable par l'expression

$$x = \frac{\lambda}{s''} - \sqrt{\frac{\lambda^2}{s''^2} - l^2}.$$

On trace le profil circulaire du calibre au moyen de x porté sur le compas suivant *(fig. 16)* :

Trois tiges sb, sd, sb' sont articulées autour du point S portant un crayon traceur. Ces trois tiges peuvent glisser chacune dans l'une des trois coulisses α, e, α' portées par la règle hh'. Ces trois coulisses peuvent d'ailleurs tourner sur elles-mêmes autour de trois pivots en ligne droite sur hh'. Le pivot de e est au milieu des deux autres à la distance d. La tige Sd est divisée à partir de S et sa coulisse e munie d'un vernier.

Plaçons la tige Sd perpendiculairement à hh' et amenons l'extrémité de la longueur x sur le zéro du vernier. Les tiges Sb, Sb' font alors un angle que nous rendons invariable en reliant invariablement ces tiges au moyen de la barre f et de ses vis de pression g, g'. Faisons marcher le crayon S, grâce au glissement de Sb, Sd, Sb' dans leurs glissières respectives. Nous tracerons ainsi le profil du calibre demandé.

Graduation du niveau. — Quand on a calibré le tube, on en divise la partie extérieure en parties égales.

Anciennement les artistes, Gambey par exemple, ne graduaient pas le niveau dans toute sa longueur; ils ne marquaient que les deux extrémités, chacune par un trait, laissant au milieu un espace non gradué. C'est que, pour eux, le niveau était seulement destiné à niveler exactement et non à mesurer les erreurs de nivellement. Lorsqu'on rencontre, dans un instrument d'astronomie, un niveau

non gradué, il est bon de coller dessus une petite bande de papier divisée en parties égales.

Comme on n'observe que les extrémités de la bulle, on se dispense parfois d'effectuer la graduation entre f et g dans la partie moyenne du tube *(fig. 17)*. On rapporte alors les extrémités aux divisions f et g. Le milieu de fg peut être considéré comme le zéro de la graduation. On dit que la bulle est *entre ses repères,* lorsque son milieu coïncide avec celui de fg.

REMARQUES.

1° Plus les niveaux sont sensibles, plus les tâtonnements pour les régler sont longs, car plus la bulle tend à rester fréquemment à l'extrémité du tube. Les constructeurs devraient donc avoir le soin d'accoler toujours deux niveaux, l'un *très sensible,* l'autre beaucoup moins. Avec ce dernier, on effectuerait rapidement un nivellement approché, que le premier rendrait ensuite rigoureux. On gagnerait par là beaucoup de temps pour les instruments portatifs et beaucoup de précision; du temps, parce que les niveaux actuels sont trop sensibles pour des nivellements rapides; de la précision, parce qu'ils ne le sont pas assez pour un nivellement parfait et pour la mesure rigoureuse des inclinaisons.

2° Lorsqu'on fait tourner rapidement la partie supérieure d'un théodolite et qu'on observe la bulle de chaque niveau mis en place, on peut faire facilement les remarques suivantes :

La bulle du niveau mobile se rapproche de l'axe vertical de rotation parce que le liquide, plus dense que la bulle, se porte à l'extrémité la plus éloignée de cet axe, en vertu de la force centrifuge développée.

La bulle du niveau fixe reste toujours en arrière du mouvement et va buter à l'extrémité qui suit l'autre. Cela est dû à l'inertie de la bulle et à son faible frottement sur le liquide et les parois du tube.

Il résulte de là qu'avant de lire un niveau il faut attendre que la bulle ait repris sa position d'équilibre.

Le niveau mobile du théodolite est généralement moins sensible que le niveau fixe et c'est à tort. On peut se servir à volonté de l'un ou de l'autre de ces niveaux et même des deux ensemble pour le nivellement

de l'axe vertical. Ce nivellement doit être commencé avec le moins sensible des niveaux, pour diminuer le nombre des tâtonnements, et achevé avec le plus sensible pour augmenter la précision.

3° Pour que la bulle ait toujours la même longueur en été et en hiver, quelques niveaux présentent un petit réservoir rempli du même liquide que le tube et communiquant avec celui-ci par un petit canal. En faisant passer du liquide du tube dans le réservoir ou inversement on arrive facilement à donner à la bulle la même longueur en toute saison.

28e Exercice.

Chercher les conditions pour que, dans le nivellement d'une droite D *ou d'un axe* A, *avant ou après le retournement du niveau, la bulle en équilibre soit : 1° entièrement libre et visible; 2° entièrement libre mais en partie cachée; 3° butée à une extrémité du tube.*

Solution : Désignons par

O le centre de l'arc du niveau *(fig. 18)*;
OV le rayon vertical de cet axe;
OR la direction de l'axe de rotation A ou de la perpendiculaire à la droite D.
$i =$ VOR l'angle de ces deux rayons, compté de OV, positivement dans le sens f;
$2l =$ EE' la longueur visible du tube;
$k =$ EM, $k' =$ E'M' les longueurs des parties de ce tube cachées par la monture;
$m =$ le milieu de EE';
$\alpha =$ ROM, compté de OR positivement dans le sens f;
$2\lambda =$ la longueur de la bulle;
$\omega = l - \lambda$, quantité toujours positive par construction;
$\omega' = \omega + k$.

On sait que i est l'inclinaison de A sur la verticale ou de D sur l'horizontale, tandis que α représente le défaut de réglage du niveau.

Nous supposerons, pour plus de simplicité, $k = k'$, condition réalisée très approximativement par les constructeurs. Au moyen de ces données, il est facile, pour la position actuelle du niveau, de calculer les angles

$$x = \text{VOE}, \quad x' = \text{VOE}',$$
$$y = \text{VOM}, \quad y' = \text{VOM}',$$

comptés à partir de OV, positivement dans le sens f. On a évidemment

$$x = i + \alpha + l, \quad x' = i + \alpha - l,$$
$$y = x + k, \quad y' = x' - k.$$

Si la bulle est en contact extérieur en E avec EM, ou en E' avec E'M', on aura, pour la distance zénithale z ou z' de son milieu,

$$z = x - \lambda = i + \alpha + \omega,$$
$$z' = x' + \lambda = i + \alpha - \omega.$$

Si, de plus, la bulle est en équilibre dans la première ou la seconde de ces positions, on aura

$$z = 0, \quad \text{ou} \quad z' = 0,$$

c'est-à-dire

(1) $\quad i + \alpha + \omega = 0,\quad$ pour l'extrémité E,

(2) $\quad i + \alpha - \omega = 0,\quad$ — E'.

Réciproquement, la relation (1) exprime le contact extérieur en E.
— (2) — E'.

Il est clair d'ailleurs que ces deux conditions ne peuvent avoir lieu en même temps, sans supposer ω nul ou $l = \lambda$, ce qui est contraire à la construction du niveau. D'après cela, on a le tableau suivant pour les positions d'équilibre de la bulle :

	L'extrémité droite e de la bulle est :		L'extrémité gauche e' de la bulle est :
Si $z < 0$,	cachée dans EM.	alors $z' < 0$,	visible
$= 0$,	en contact en E avec EM.		
> 0,	visible.	et si $z' < 0$,	visible
		$= 0$,	en contact en E' avec E'M'
		> 0,	cachée sous E'M'.

qu'on peut mettre sous la forme

(I)

		e	e'
$-\omega$	$> i + \alpha \ldots$	cachée ⁎	visible
	$= i + \alpha \ldots$	en E	id.
$-\omega < i + \alpha$	$< \omega \ldots\ldots$	visible	id.
	$= \omega \ldots\ldots$	id.	en E'
	$> \omega \ldots\ldots$	id.	cachée ⁎

Supposons maintenant la bulle, non déformée, en contact en M ou M' avec le fond du tube; on aura, pour la distance zénithale ζ ou ζ' de son milieu,

$$\zeta = y - \lambda = i + \alpha + l + k - \lambda = i + \alpha + \omega'$$
$$\zeta' = y' + \lambda = i + \alpha - l - k + \lambda = i + \alpha - \omega'$$

en posant

$$\omega' = l - \lambda + k = \omega + k.$$

Si de plus la bulle est en équilibre dans l'une ou l'autre de ces positions, on aura

$$\zeta = 0, \quad \text{ou} \quad \zeta' = 0.$$

On pourrait construire un tableau analogue au précédent, en y changeant ω en ω' et qui donnerait les conditions pour que la bulle soit libre ou non. Mais comme une extrémité visible est libre *a fortiori*, il suffira de considérer les deux cas extrêmes du tableau (I), savoir : $-\omega > i + \alpha$ et $\omega < i + \alpha$.

Dans le premier cas, si on a :

$\zeta < 0$, la bulle butte contre le fond M du tube;
$\zeta = 0$, la bulle est en contact avec M et sans déformation;
$\zeta > 0$, la bulle est libre.

Dans le deuxième cas, si on a :

$\zeta' < 0$, la bulle est libre;
$\zeta' = 0$, la bulle est en contact avec le fond M' du tube, sans déformation;
$\zeta' > 0$, la bulle butte contre M'.

On peut résumer toutes les conditions précédentes de la manière suivante, si on remarque que l'on a $\omega < \omega'$:

$$
\text{(II)} \left\{
\begin{array}{ll}
\left\{\begin{array}{ll}
-\omega' > i + \alpha & \text{L'extrémité } e \text{ butte contre M.} \\
-\omega' = i + \alpha & \quad\text{— est en contact en M.} \\
-\omega' < i + \alpha < -\omega & \quad\text{— est libre et cachée.}
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{ll}
i + \alpha = -\omega & \quad\text{— est en contact en E.} \\
\omega > i + \alpha > -\omega & \text{Bulle entièrement libre et visible.} \\
i + \alpha = \omega & \text{L'extrémité } e' \text{ est en contact en E}'.
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{ll}
\omega' > i + \alpha > \omega & \quad\text{— est libre et cachée.} \\
\omega' = i + \alpha & \quad\text{— est en contact en M}'. \\
\omega' < i + \alpha & \quad\text{— butte contre M}'.
\end{array}\right.
\end{array}
\right.
$$

On voit comment se succèdent, d'une façon continue, les divers aspects sous lesquels se présente la bulle, lorsque l'observateur fait varier le binôme $i + \alpha$ dont les deux termes sont à sa disposition, depuis une valeur inférieure à $-\omega'$, jusqu'à une valeur supérieure à $+\omega'$.

Si l'on retourne le niveau, bout pour bout, les considérations et les formules précédentes subsistent. Il n'y a qu'à changer le signe de la valeur numérique de α dans les tableaux, en appelant toujours e et e' les extrémités de droite et de gauche pour l'observateur qui n'a pas changé de place après le retournement.

On doit remarquer que la bulle peut buter du même côté de l'observateur, avant et après le retournement, par exemple lorsque i étant assez grand en valeur absolue α est nul ou très petit. Elle peut aussi buter à droite, puis à gauche ou inversement, par exemple lorsque i est nul ou très petit, α étant assez grand en valeur absolue.

29e Exercice.

Quel est le nombre des manœuvres, indiquées au n° 142 du Cours, *pour rendre la bulle libre et entièrement visible, lorsqu'elle butte d'abord à une extrémité du niveau et que les quantités α, i sont également inconnues?*

Solution : On sait que, dans ce cas, on commence par amener la bulle au milieu du tube en agissant sur la vis u de réglage du niveau,

c'est-à-dire par faire $\alpha = -i$. Ensuite, on retourne le niveau bout pour bout, ce qui donne $\alpha = +i$.

Si la bulle butte encore, on diminue i d'une certaine quantité $\frac{i}{p}$ en agissant sur une des vis v de calage de l'axe A à niveler. On ramène la bulle par u au milieu du tube, ce qui donne $\alpha = -i + \frac{i}{p}$. On retourne le niveau et la valeur commune de α et de l'inclinaison de A est alors $i - \frac{i}{p}$.

Si la bulle butte encore, on continue de la même manière et après le $(m+1)^e$ retournement du niveau, la valeur commune de α et de l'inclinaison de A est $i - m\frac{i}{p}$, en supposant que, dans chaque répétition de la manœuvre, on fasse, par v, varier cette inclinaison sensiblement de la même quantité $\frac{i}{p}$, ce qui est facile pour une main exercée.

La bulle sera libre et entièrement visible lorsqu'on aura (tableau II de l'exercice précédent)

$$-\omega \leq 2i - 2m\frac{i}{p} \leq \omega,$$

double inégalité qui se réduit, dans la pratique, à

$$m \geq p\left(1 - \frac{\omega}{2i}\right) \qquad \text{lorsque } i \text{ est positif,}$$

$$m \geq p\left(1 + \frac{\omega}{2i}\right) \qquad \text{— \quad négatif,}$$

c'est-à-dire finalement à

$$(1) \qquad m \geq p\left(1 - \frac{\omega}{2i}\right)$$

en prenant i en valeur absolue.

REMARQUE SUR LE NIVELLEMENT D'UN AXE VERTICAL.

Le niveau étant réglé, placé parallèlement à deux vis calantes v, v' de l'axe, la bulle amenée au milieu du tube par le jeu de ces vis,

il arrive souvent qu'une faible rotation, ou variation de niveau en azimut, jette cette bulle à une extrémité, puis même d'une extrémité à l'autre. C'est une preuve que l'on est très loin du nivellement. Si, de sa position initiale, on faisait tourner le niveau d'environ 180°, la bulle s'écarterait du milieu; et si, après l'avoir fait rétrograder, par v, v' de la moitié de l'écart, on revenait sensiblement à l'azimut primitif, on verrait la bulle s'écarter encore énormément de sa dernière position; et ainsi de suite, de sorte qu'on ne finirait pas. Dans ce cas, il faut régler immédiatement la troisième vis v'' dont l'écart considérable produit ces anomalies de la bulle. Ayant rendu le niveau perpendiculaire aux deux premières vis et, par la troisième, amené la bulle au milieu, si on revient au parallélisme avec les deux premières vis, toutes les anomalies précédentes disparaissent.

Si l'on s'obstinait sur les deux premières vis, ces anomalies dans la position de la bulle pourraient faire croire que le terrain, le pied ou la monture de l'instrument *travaillent;* tandis qu'en réalité elles ne tiennent qu'à ce que ne remettant, dans les retournements, le niveau aux mêmes azimuts qu'à *l'œil* et non *rigoureusement,* une petite différence d'azimut déplace énormément la bulle lorsque la troisième vis n'est pas réglée.

30e Exercice.

Quelle est la ligne droite nivelée, lorsqu'on retourne bout pour bout un niveau rigide, de forme quelconque, sur un corps solide de forme aussi quelconque? Applications à la lunette méridienne.

Solution : Supposons qu'avant le retournement les points a, b du niveau coïncident respectivement avec les points M, N du corps, et qu'après le retournement a, b aient permuté leurs positions, c'est-à-dire que a coïncide avec N et b avec M. La droite nivelée ou plutôt dont le niveau donne l'inclinaison est MN *(fig. 19).*

Il résulte de là que si les crochets du niveau de la lunette méridienne forment un seul et même dièdre, cas ordinaire, le retournement du niveau sur l'axe de rotation de la lunette, prise dans une position donnée, donne l'inclinaison de la droite ab représentant la direction de l'arête de ce dièdre lorsque le niveau repose sur les tourillons; car

c'est sur cette droite que le retournement a effectivement lieu. Si les tourillons sont égaux, l'inclinaison β ainsi obtenue est celle de l'axe de rotation xy, puisque alors ab est parallèle à xy.

Si les coussinets forment un seul et même dièdre, cas ordinaire, c'est sur l'arête AB de ce dièdre qu'on retourne en réalité la lunette lorsqu'on change sa position directe ou inverse; c'est-à-dire que le retournement de la lunette revient à une rotation de son axe de 180° autour d'une droite uz perpendiculaire à AB et située dans un plan vertical. Si pendant cette rotation on imagine, par la pensée, le niveau lié invariablement à la lunette, on voit que ab prendra la direction $a'b'$ symétrique de ab par rapport à uz; et, après le retournement, on nivellera la direction $a'b'$ comme on avait nivelé ab. Soit β' l'inclinaison de $a'b'$.

L'inclinaison p de AB ou de la bissectrice de l'angle aOa' sera

$$p = \tfrac{1}{2}(\beta + \beta'),$$

par suite, on aura, en supposant égaux les dièdres des coussinets et des crochets,

$$\text{angle } \tfrac{1}{2}\, a\mathrm{SA} = \tfrac{1}{2}(\beta - p) = \tfrac{1}{4}(\beta - \beta').$$

Donc l'inclinaison de l'axe xy de rotation sera

$$\beta - \tfrac{1}{4}(\beta - \beta') \qquad \text{position directe,}$$
$$\beta' + \tfrac{1}{4}(\beta - \beta') \qquad \text{position inverse.}$$

et $\tfrac{1}{4}(\beta - \beta')$ représentera l'inégalité des tourillons.

31e Exercice.

Déterminer les indications de la bulle pour les deux positions extrêmes d'équilibre du niveau d'une lunette méridienne, en tenant compte du frottement des crochets sur les tourillons de la lunette, dont l'axe de rotation est supposé horizontal et dirigé de l'ouest à l'est.

Solution : 1° La symétrie du niveau permet de décomposer son

poids P en deux autres $\frac{P}{2}$, appliquées respectivement en des points équidistants de l'axe, sur chaque montant que supporte chaque tourillon. Soient :

O le centre de la section droite et circulaire d'un tourillon menée par le montant correspondant du niveau (*fig. 20*);

Oy, Oz les droites horizontale et verticale de cette section, menées par O;

BAC le crochet reposant sur le tourillon;

G le point d'application du poids $\frac{P}{2}$ sur le montant terminé par ce crochet.

Nous pouvons supposer les trois points O, A, G en ligne droite par construction. Pour que le niveau soit en équilibre, il suffit qu'il y ait équilibre sur chaque montant entre les forces qui le sollicitent, savoir :

Le poids $p = \frac{P}{2}$; les réactions N, N' du tourillon dirigées suivant les rayons OC, OB des points de contact C, B de ce tourillon avec le crochet BAC; les frottements f, f' en C et B.

Désignons par φ l'angle de frottement; posons

$$a = OG, \quad r = OB = OC,$$
$$\theta = ZOG, \quad \Delta = BAO = OAC, \quad f = N \operatorname{tg} \varphi, \quad f' = N' \operatorname{tg} \varphi,$$

et écrivons l'équilibre de chaque montant en exprimant que les sommes des projections des forces sur Oy, sur Oz et que la somme de leurs moments relative à O sont nulles. On a ainsi les trois relations :

$$(1) \left\{ \begin{aligned} &N\cos(\Delta-\theta) - f\sin(\Delta-\theta) - N'\cos(\Delta+\theta) - f'\sin(\Delta+\theta) = 0, \\ &N\sin(\Delta-\theta) + f\cos(\Delta-\theta) + N'\sin(\Delta+\theta) - f'\cos(\Delta+\theta) = p, \\ &(f+f')r = pa\sin\theta, \end{aligned} \right.$$

ou bien

$$(2) \left\{ \begin{aligned} N \sin 2\Delta &= p \cos\varphi \cos(\Delta + \theta - \varphi), \\ N' \sin 2\Delta &= p \cos\varphi \cos(\Delta - \theta + \varphi), \\ (N + N')\, r \operatorname{tg} \varphi &= pa \sin\theta, \end{aligned} \right.$$

d'où l'on tire N, N', φ pour chaque valeur de θ. Si N, N' sont positifs

et φ inférieur à l'angle φ_0 du frottement au départ, l'équilibre a lieu pour la valeur considérée de θ. Comme φ et θ sont très petits, et 2Δ inférieur à 180°, les conditions d'équilibre deviennent ainsi

$$\Delta + \theta - \varphi < 90^\circ, \quad \Delta - \theta + \varphi < 90^\circ, \quad (N + N') r \operatorname{tg} \varphi_0 > p a \sin \theta,$$

ou, en remplaçant $(N + N')$ par sa valeur, pour $\varphi = \varphi_0$, tirée des deux premières équations (2),

$$(3) \qquad \varphi + (\Delta - 90^\circ) < \theta < \varphi - (\Delta - 90^\circ),$$

$$(4) \qquad a \sin \theta \sin \Delta < r \sin \varphi_0 \cos(\theta - \varphi_0).$$

Dans tous les niveaux de lunette méridienne $\Delta = 45^\circ$, $\sin \Delta = \frac{\sqrt{2}}{2}$; la double inégalité (3) est toujours satisfaite en même temps que l'inégalité (4) qui peut s'écrire

$$(5) \qquad \operatorname{tg} \theta < \frac{r \sin 2\varphi_0}{2(a \sin \Delta - r \sin^2 \varphi_0)} = \frac{k \sin 2\varphi_0}{2(\sin \Delta - k \sin^2 \varphi_0)},$$

en posant $k = \frac{r}{a}$. Dans tous les niveaux $\frac{r}{a}$ est plus petit que 1 et dans la plupart beaucoup plus petit. On peut donc remplacer (5), avec une exactitude suffisante, par

$$\theta < \frac{k\varphi_0}{\sin \Delta} = k\sqrt{2}\,.\,\varphi_0.$$

Nous avons cherché jusqu'ici les conditions d'équilibre lorsque le point G est situé à droite de Oz. Elles conviennent encore au cas où G est situé à gauche de Oz, si on a le soin de changer le signe de φ, φ_0 ou du frottement et le sens de l'inégalité (5). On trouve ainsi la condition définitive et unique

$$(6) \qquad -k\sqrt{2}\,.\,\varphi_0 < \theta < k\sqrt{2}\,.\,\varphi_0.$$

2° Appelons α l'azimut de la fiole OA du niveau par rapport à la ligne ouest-est OE, β son inclinaison sur l'horizon lorsque $\theta = 0$, et cherchons la valeur β' de cette inclinaison pour une valeur quelconque de θ.

Les directions OA, OE et la projection OC de OA sur l'horizon forment un trièdre déterminant sur la sphère de centre O un triangle

abc rectangle en c (*fig. 21*). Lorsque $\theta = 0$, ce triangle donne les relations :

$$\cos\gamma = \cos\alpha \cos\beta,$$
$$\sin\beta = \sin\gamma \sin b_0,$$

qui permettent de calculer son hypoténuse γ et son angle b_0, en supposant α, β connus.

Pour une valeur quelconque de θ, l'hypoténuse γ reste fixe, l'angle b devient $b_0 - \theta$, et α, β deviennent α', β'. On a donc

$$\sin\beta' = \sin\gamma \sin(b_0 - \theta),$$

ou bien

$$\sin\beta' = \sin\beta \cos\theta - \sin\gamma \cos b_0 \sin\theta;$$

mais on sait que

$$\sin\gamma \cos b_0 = \cos\beta \sin\alpha,$$

donc

$$\sin\beta' = \sin\beta \cos\theta - \cos\beta \sin\alpha \sin\theta.$$

Si nous considérons α, β, θ^2 comme des infiniment petits du premier ordre et si nous négligeons les termes d'ordre supérieur au second, nous aurons

$$\beta' = \beta - \alpha\theta - \tfrac{1}{2}\beta\theta^2. \tag{7}$$

Les limites $\pm k\sqrt{2}\,\varphi_0$ de θ, correspondantes aux positions extrêmes d'équilibre du niveau sur l'axe de la lunette, étant aussi très petites, nous aurons pour ces limites,

$$\beta' = \beta \mp \alpha k\sqrt{2}\varphi_0 - \beta k^2 \varphi_0^2. \tag{8}$$

D'une position extrême à l'autre du niveau, la bulle oscille d'une quantité égale à la valeur absolue de $2\sqrt{2}\,\alpha k\varphi_0$.

Aussi, a-t-on toujours soin de régler le parallélisme de l'axe de la fiole du niveau et de l'axe de rotation de la lunette, c'est-à-dire de rendre α et β nuls pour que β' soit indépendant de θ dans les nivellements.

32^e Exercice.

Régler le parallélisme du niveau et de l'axe horizontal A *d'une méridienne.*

Solution : La monture du niveau porte deux vis : l'une horizontale *h* qui permet de faire varier l'azimut de la fiole, l'autre verticale *v* qui permet d'en faire varier la hauteur lorsque cette monture repose, par ses pattes ou crochets, sur l'axe horizontal A. Ces deux vis permettent de rendre parallèles l'axe F de la fiole, cylindrique extérieurement, et l'axe A de rotation de la lunette, si on a le soin de noter dans quel sens marche la bulle lorsqu'on écarte légèrement le niveau vers le nord ou vers le sud, après l'avoir fait reposer sur les tourillons dans la position qui répond sensiblement à $\theta = 0$. Prenons un exemple sur un niveau reposant *au-dessous* de l'axe.

1° On écarte le niveau vers le *nord,* la bulle monte à l'*ouest;*
— *sud,* — l'*est.*

Cela prouve que la fiole n'est pas réglée en azimut et que son axe F a, par rapport à A *(fig. 22),* la position indiquée sur la figure, (1re partie), qui représente la projection horizontale du niveau. Il faut donc agir sur la vis *h* dans le sens de la flèche *f*, jusqu'à ce que la bulle reste stationnaire dans son tube, ou bien s'avance toujours du même côté *est* ou *ouest* lorsqu'on écarte le niveau vers le nord ou vers le sud. La fiole du niveau est alors réglée en azimut.

2° Supposons qu'après le réglage en azimut, la bulle s'avance toujours vers l'est lorsqu'on écarte le niveau vers le nord ou vers le sud. Cela prouve que l'axe FF de la fiole est situé relativement à l'axe A, comme le montre la figure (2^e partie), qui représente la projection du niveau sur le premier vertical.

On agira donc sur la vis *v* jusqu'à ce que la bulle reste immobile dans son tube, pour des oscillations du niveau de 5° à 10° et du nord au sud.

Cette manœuvre est justifiée par l'équation (7) de l'exercice précédent. Lorsque α et β ne sont pas nuls, le signe de $\beta' - \beta$ est celui du

terme $-\alpha\theta$ beaucoup plus grand que le terme suivant $-\frac{1}{2}\beta\theta^2$. Ce signe change donc avec celui de θ, c'est-à-dire que, suivant qu'on écarte le niveau vers le nord en donnant à θ des valeurs positives ou vers le sud en donnant à θ des valeurs négatives, la bulle se déplace vers l'ouest ou vers l'est.

Lorsque α est nul, $\beta' - \beta$ ne change plus de signe avec θ, et à partir de $\theta = 0$ tout déplacement du niveau fait marcher la bulle dans le même sens, que ce déplacement ait lieu vers le nord ou vers le sud.

CHAPITRE III

Mesure des angles.

33[e] Exercice.

Dans les observations d'objets diversement éloignés, étudier l'influence de la mise au point ou du tirage de la lunette.

Lorsque le réticule d'une lunette n'est pas dans le *plan focal* de l'objectif, *conjugué de l'objet visé,* l'image de cet objet se fait soit en avant, soit en arrière de ce réticule et, dans les deux cas, en déplaçant un peu l'œil, d'un côté à l'autre de l'oculaire, on voit un même point de l'image se projeter en différents points du réticule, comme il arrive en regardant un paysage à travers une fenêtre dont les barreaux cachent des objets différents suivant la position de l'œil. On dit alors qu'il y a une parallaxe des fils. Quand la parallaxe est nulle, le réticule est bien placé et on peut seulement alors faire une bonne visée.

Supposons qu'après avoir visé un objet très éloigné A, on veuille viser un objet très rapproché B avec la même lunette. L'image *b* de B se formera plus loin de l'objectif que l'image *a* de A qui était, par hypothèse, dans le plan du réticule. En d'autres termes, *b* sera plus près de l'oculaire que le réticule. Il y aura une parallaxe des fils qui ne disparaîtra qu'en *tirant* convenablement le tube porteur du réticule et de l'oculaire jusqu'à ce qu'on obtienne la vision nette de l'objet.

Si le *tirage* n'a pas lieu suivant la direction primitive de l'axe optique de la lunette, cet axe change évidemment de position à l'intérieur du *tube-objectif.* Le changement est faible puisque le *tube-réticule* et le *tube-objectif* sont des cylindres concentriques sur l'axe commun desquels se trouvent sensiblement la croisée des fils et le

centre optique de l'objectif. Toutefois, il est toujours à craindre que ce changement ne soit pas négligeable. On peut donc concevoir quelques légers doutes sur les angles mesurés entre un objet éloigné et un autre rapproché ou entre deux objets rapprochés, mais à des distances différentes; en un mot, dans tous les cas où, pour annuler la parallaxe des fils, on est obligé, soit de *tirer* le réticule, soit de l'*enfoncer*.

Heureusement cet inconvénient n'existe pas pour les observations célestes et rarement en géodésie, parce que les points visés sont toujours assez éloignés pour que le réticule reste placé dans le plan focal principal de l'objectif.

Toutefois, dans les observations successives de points terrestres très rapprochés et de points célestes, faites au cercle pour obtenir les distances angulaires de ces points, les constructeurs permettraient à l'astronome d'éliminer l'*erreur du tirage,* en permettant à la lunette de tourner sur elle-même de 180° autour de son axe optique, réglé pour viser à l'infini. En effet, soient *(fig. 23)* :

p un point terrestre très rapproché;
p' un point céleste ou un point terrestre très éloigné;
c la croisée des fils du réticule de la lunette;
O le centre optique de l'objectif;
cO la position de l'axe optique dirigé sur le point p, avant tout tirage, immédiatement après la visée du point p' et λ la lecture correspondante.

Le point p étant très rapproché, son image ne se fera pas en c, mais en ϖ à une distance de O plus grande que Oc. Pour voir nettement cette image avec les fils, il faudra tirer le réticule d'une certaine quantité représentée par cc' en grandeur et direction. La direction de l'axe optique passera alors de cO à c'O et pour diriger c'O sur le point p, il faudra faire tourner la lunette dans le sens f d'un angle $\alpha = cOc'$. Si l est la lecture pour cette visée et si la graduation croit dans le sens de f, on aura

$$l = \lambda + \alpha.$$

Si maintenant on fait tourner la lunette sur elle-même ou autour

de Oc de 180°, l'axe optique deviendra Oc'' symétrique de Oc' par rapport à Oc. Pour amener $c''O$ sur le point p, c'est-à-dire pour faire une deuxième visée de ce point, il faudra faire tourner la lunette sur le cercle, dans le sens f' opposé au sens f, d'un angle $2\alpha = c''Oc'$; de sorte que l'on aura en désignant par l' la lecture pour ce deuxième pointé sur p,

$$l' = \lambda - \alpha,$$

d'où

$$(1) \qquad \lambda = \tfrac{1}{2}(l + l'),$$

$$(2) \qquad \alpha = \tfrac{1}{2}(l - l').$$

La formule (1) donne la lecture λ, purgée de l'effet du tirage lorsqu'on passe de p' à p. La formule (2) donne l'erreur α résultant de ce tirage.

Si l'on voulait connaître l'angle Occ' que fait la direction du tirage avec celle de l'axe optique Oc, il suffirait de connaître Oc distance focale de l'objectif et cc' valeur absolue du tirage, quantités faciles à mesurer. On aurait alors dans le triangle Occ' les trois éléments α, Oc, cc' et on pourrait calculer l'angle Occ'.

Il nous reste à dire combien il est facile de régler préalablement l'axe optique de la lunette, pointée sur p', parallèlement à son axe de rotation sur elle-même. Il suffit de déplacer, peu à peu, le réticule au moyen de ses vis latérales, jusqu'à ce que la lunette reste pointée sur p' après comme avant son retournement sur elle-même.

34e Exercice.

Évaluer l'erreur d'excentricité de la lunette d'un cercle dans la mesure de la distance angulaire de deux points peu éloignés A, B.

Solution : On appelle *excentricité de la lunette* d'un cercle, la distance $Oa = \rho$ de l'axe optique de cette lunette à son centre de rotation O. Il faut bien se garder de la confondre avec l'*excentricité du cercle* lui-même qui est la distance du centre de rotation au centre des divisions. Nous supposerons cette dernière nulle dans ce qui suit.

En tournant autour de O, l'axe optique mn enveloppe un petit cercle de rayon Oa et de centre O *(fig. 24)*.

Pour passer de la position mn, pointée sur A, à la position $m'n'$, pointée sur B, il tourne de l'angle $AcB = aOb$ qui est donné par les lectures du cercle divisé, mais qui diffère de l'angle AOB qu'il s'agit de mesurer. La différence ou correction est facile à obtenir. On a en effet,

$$AOB = AIB - B = AcB + A - B.$$

L'angle *cherché* est égal à l'angle *lu* augmenté de A — B ou de la demi-différence des diamètres apparents du cercle Oa vu de A et B.

On voit que pour deux points très éloignés, *a fortiori* pour deux étoiles, la correction est négligeable.

L'égalité précédente peut s'écrire

$$(1) \qquad x = l - l' + k\rho,$$

en appelant x l'angle AOB; l et l' les lectures du cercle correspondantes aux pointés sur A et B; k la différence $\left(\frac{1}{OA} - \frac{1}{OB}\right)$; en supposant de plus que les angles A, B sont assez petits pour que leurs cubes soient négligeables, circonstance presque toujours réalisée dans la pratique.

Si le triangle AOB est tracé sur un terrain bien uni, si ses trois côtés ont été bien mesurés, on pourra calculer *a priori* la valeur de x et de k. L'observation des points A, B donnant l, l', l'équation (1) donnera ρ et d'autant plus exactement, toutes choses égales d'ailleurs, que k sera plus grand.

Dans le cas d'une lunette de théodolite, on peut pointer les points A, B d'abord par la droite, puis par la gauche, ce qui donne successivement les deux relations

$$x = (l - l') + k\rho,$$

$$x = (l_1 - l'_1) - k\rho,$$

l, l' répondent à la première observation de A, B et l_1, l'_1 à la seconde.

Ces relations fournissent immédiatement

$$x = \tfrac{1}{2}(l - l') + \tfrac{1}{2}(l_1 - l'_1),$$
$$\rho = \frac{1}{2k}(l_1 - l'_1) - \frac{1}{2k}(l - l'),$$

sans qu'il soit besoin de conclure l'angle O de la mesure des trois côtés du triangle OAB; il suffit de mesurer les deux côtés OA, OB pour former k.

La détermination de ρ est impossible par l'observation de points très éloignés, car alors k est nul et $x = l - l' = l_1 - l'_1$.

35e Exercice.

Pour mesurer, au sextant, la distance angulaire de deux droites parallèles AB, CD vues de O, on place le plan du limbe perpendiculairement à ces droites. Il les coupe alors en deux points M, N dont la distance angulaire égale celle des droites et si l'on fait coïncider les images de M, N, celles des droites coïncident également.

Mais les images des droites ne coïncident plus et font entre elles un angle α, si l'on fait coïncider les images respectivement directe et doublement réfléchie de deux autres points quelconques A, C des droites, définis par leur distance angulaire m, n avec la direction commune OR de ces droites.

Calculer α, connaissant m, n, et la distance angulaire s des points A, C *mesurée sur le limbe.*

Solution : Soient : O le centre de la sphère céleste ; P, p les points de cette sphère représentant les directions des normales au grand et au petit miroir ; xPpy le grand cercle déterminé par le limbe du sextant ; maR, ncR les grands cercles représentant, sur la sphère, les plans déterminés par l'œil O de l'observateur et les droites MAB, NCD. Les arcs Ra, Rc, ac sont égaux respectivement à m, n, s.

L'arc c'R' symétrique de cR, relativement à P, représente l'image de NCB sur le grand miroir et l'arc ad symétrique de c'R' par rapport à p en représente l'image doublement réfléchie *(fig. 25)*. On

a donc

$$\alpha = da\mathrm{R} = dac - \mathrm{R}ac,$$

mais, en vertu de la symétrie énoncée,

$$dac = yc'\mathrm{R}' = \mathrm{R}cx,$$

donc

$$\alpha = \mathrm{R}cx - \mathrm{R}ac = 180^\circ - (c + a),$$

en désignant par c et a les angles $\mathrm{R}ca$, $\mathrm{R}ac$ du triangle sphérique $ac\mathrm{R}$. Or, ce triangle donne, suivant une analogie de Néper et une formule fondamentale,

$$\cot\alpha = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a + c) = \frac{\cos\frac{1}{2}(m - n)}{\cos\frac{1}{2}(m + n)}\cot\tfrac{1}{2}\mathrm{R},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\mathrm{R} = \frac{\mathrm{M}}{\sin(p - s)},$$

en posant, suivant l'usage,

$$2p = m + n + s,$$

$$\mathrm{M} = \sqrt{\frac{\sin(p - m)\sin(p - n)\sin(p - s)}{\sin p}},$$

on déduit finalement

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos\frac{1}{2}(m + n)}{\cos\frac{1}{2}(m - n)}\cdot\frac{\mathrm{M}}{\sin(p - s)}.$$

36e Exercice.

Une lunette astronomique L *est munie de deux fils, l'un fixe et horizontal h, l'autre v vertical et mobile au moyen d'une vis micrométrique* V *munie d'un tambour lecteur. On pointe* L *sur l'objectif de la lunette l d'un théodolite bien nivelé. Lorsque l, fixée à la distance zénithale z, tourne en azimut de l'angle α, l'image de la croisée de ses fils marche sur h de la quantité n évaluée en tours de la vis* V. *Quelle est la valeur d'un tour?*

Solution : Désignons par ω l'angle des deux positions de l'axe optique de l au commencement et à la fin de la rotation de cette lunette. Si par un point O on mène des parallèles à ces positions et à la verticale de ce point, on formera un trièdre déterminant, sur la sphère de centre O et de rayon 1, un triangle sphérique ZAB *(fig. 26)*, dans lequel on connaît les deux côtés ZA, ZB égaux à z et l'angle en Z. Ce triangle donne ω par la formule

$$\cos\omega = \cos^2 z + \sin^2 z \cos\alpha = \cos\alpha + 2\sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha \cos^2 z.$$

On aura ensuite la valeur d'un tour de la vis de L par la formule évidente

$$1^t = \frac{\omega}{n}.$$

CHAPITRE IV

Dipléidoscope, sidérostat, héliostat.

Nous terminerons ce livre par l'étude du dipléidoscope, du sidérostat et de l'héliostat.

37e Exercice.

PRINCIPE DU DIPLÉIDOSCOPE OU PRISME DES PASSAGES.

Le dipléidoscope est un prisme droit à base triangulaire isocèle ABC, formé par deux miroirs AB, BC et une glace AC à faces parallèles. Les faces réfléchissantes des miroirs regardent l'intérieur du prisme; l'une d'elles BC est également inclinée sur l'autre et sur la glace.

Si un faisceau de rayons lumineux parallèles $S\beta$ tombe sur la glace AC, il se divise au point d'incidence β en deux parties dont l'une se réfléchit immédiatement suivant la direction $\beta S'$, tandis que l'autre traverse AC, sans changer de direction *(fig. 27)*, pour se réfléchir successivement sur AB, sur BC et traverser la glace une seconde fois, suivant une direction $\alpha S''$, généralement différente de la direction $\beta S'$ et non située avec elle dans le même plan.

Ce prisme donnera deux images d'un astre S, l'une S_1 par une seule réflexion sur la glace, l'autre S_2 par deux réflexions successives sur les miroirs *(fig. 28)*.

1° En un lieu quelconque de la terre, fixons le prisme après avoir dirigé le miroir BC suivant le méridien et voyons comment se déplacent S_1, S_2 pendant la rotation diurne, autour de l'axe du monde, de S que nous réduisons d'abord à un point ou à une étoile.

Par le centre O de la sphère céleste, menons les rayons Oa, Ob, Oc et OS_1, OS_2 respectivement parallèles aux normales αa, βb, γc sur les faces du prisme et aux faisceaux $\beta S'$, $\alpha S''$. Appelons ces faisceaux *image* S_1, *image* S_2 pour rappeler qu'ils donnent ces images.

a, b, c sont sur un même grand cercle perpendiculaire au plan méridien et b, c sont symétriques par rapport à ce plan.

L'astre S décrivant son petit parallèle autour du pôle P, l'image S_1 décrit un petit cercle égal autour de p symétrique de P par rapport à b. Ces deux cercles sont décrits uniformément avec la même vitesse, dans le même sens, de gauche à droite, pour deux observateurs respectifs ayant les pieds en O et la tête l'un en P, l'autre en p.

L'image S' de S sur AB décrit aussi, avec la même vitesse constante, de gauche à droite, un petit cercle égal aux précédents autour de p' symétrique de P par rapport à c. En prenant S″ symétrique de S' relativement à O et S_2 symétrique de S″ relativement à a, ou, ce qui revient au même, en prenant simplement S_2 symétrique de S' par rapport au plan méridien, on obtient l'image de S doublement réfléchie.

Les deux images S_1 et S_2 décrivent donc le même petit cercle autour de p comme pôle, avec la vitesse angulaire constante du mouvement diurne, mais en sens contraire. Ces deux images se superposent deux fois en μ, ν pendant la durée d'un jour sidéral, lorsque S_1 et S' sont symétriques par rapport au plan méridien, c'est-à-dire lorsque S traverse ce plan en m, n.

A une époque sidérale quelconque t, comptée à partir du passage de S en m, les arcs mS, μS_1, μS_2 sont égaux et la distance angulaire 2V des images S_1, S_2 est donnée par la formule

$$(1) \qquad \sin \tfrac{1}{2} V = \sin \mathfrak{L} \sin t,$$

qui résulte immédiatement du triangle sphérique $S_1 p S_2$ dans lequel

$$p = 2t, \quad pS_1 = pS_2 = \text{la distante polaire } \mathfrak{L} \text{ de S.}$$

Cette formule donne V avec le signe + ou le signe — suivant que les images S_1, S_2 s'éloignent ou se rapprochent de μ.

La coïncidence des images, au moment du passage méridien supérieur de S en m s'observe soit à l'œil nu, soit à l'aide d'une petite lunette L pointée dans la direction μO.

Le lieu du point μ, lorsqu'on passe d'une étoile à une autre, est le grand cercle $\mu p \nu$ perpendiculaire au grand cercle abc, qui représente la base du prisme, et symétrique, relativement à b, du méridien avec lequel il fait un angle égal à bOc. Le cercle $\mu p \nu$ peut se nommer

cercle de visée et la lunette L doit être montée à angle droit sur un axe de rotation perpendiculaire au plan de ce cercle.

A une époque quelconque t, les images S_1, S_2 sont symétriques par rapport au cercle $\mu p \nu$ qu'elles traversent à angle droit au moment où S traverse le méridien.

2° Il est facile de se rendre compte maintenant de l'observation du soleil à travers le prisme. Tout ce que nous avons dit d'une étoile peut se répéter de chacun des points du soleil. Tandis que le centre S de cet astre décrit son cercle parallèle autour de P, ses deux images S_1, S_2 décrivent un petit cercle égal autour de p en restant symétriques par rapport au plan de visée $\mu p \nu$ (*fig. 29*). Deux points quelconques d, e du disque solaire, situés sur un même parallèle céleste, donnent de même chacun deux images d_1, d_2 et e_1, e_2 décrivant un même cercle autour de p, mais en sens contraire. Au moment où S franchit le méridien du lieu en m, les deux images du soleil se superposent. Alors les deux images de chaque point du diamètre du disque solaire qui se trouve dans le méridien, coïncident entre elles; et plus généralement $e_1\,d_1$ se superpose à $e_2\,d_2$, de la manière indiquée pour le mouvement des images, c'est-à-dire e_1 sur d_2 et d_1 sur e_2.

Les époques τ des contacts des images S_1 et S_2 avant et après le passage méridien du centre S du soleil, comptées de ce passage, sont données par la relation (1) en y faisant V égal au diamètre apparent 2Δ de l'astre. On a ainsi

$$\sin\tau = \pm \sin\Delta \operatorname{coséc} \mathfrak{L},$$

et 2τ représente la durée du passage d'une image sur l'autre. Elle est égale à celle que met le disque solaire à franchir le méridien.

3° Il est facile de vérifier, par le calcul, les résultats précédents.

Soient (*fig. 30*) : O (X, Y, Z) un premier système d'axes rectangulaires où $O\alpha$, OP sont les axes des X et des Z;

O (x, y, z) un deuxième système d'axes obtenu en faisant tourner le premier autour de OX de l'angle ω que fait OP avec la direction Oz de l'arête du prisme;

O (x', y', z'), O (x'', y'', z'') les systèmes d'axes obtenus en faisant tourner le deuxième autour de Oz, de gauche à droite ou de droite à gauche, d'un angle α égal à la moitié de bOc.

Dans ces quatre systèmes d'axes, les coordonnées rectilignes d'une étoile S à l'époque sidérale t, comptée de son passage méridien, sont respectivement

$$X = \sin \mathfrak{P} \sin t, \quad Y = \sin \mathfrak{P} \cos t, \quad Z = \cos \mathfrak{P},$$
$$x = X, \quad y = Y \cos \omega - Z \sin \omega, \quad z = Y \sin \omega + Z \cos \omega,$$
$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \quad y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha, \quad z' = z,$$
$$x'' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad y'' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha, \quad z'' = z.$$

L'image simplement réfléchie S_1 étant symétrique de S par rapport à Ob, ou Oy', a pour coordonnées $x'_1\, y'_1\, z'_1$ relativement à $O\,(x'\, y'\, z')$,

$$x'_1 = -x', \quad y'_1 = +y', \quad z'_1 = -z',$$

et pour coordonnées $x_1\, y_1\, z_1$ relativement à $O\,(x,\, y,\, z)$,

$$x_1 = x'_1 \cos \alpha + y'_1 \sin \alpha = y \sin 2\alpha - x \cos 2\alpha,$$
$$y_1 = -x'_1 \sin \alpha + y'_1 \cos \alpha = y \cos 2\alpha + x \sin 2\alpha,$$
$$z_1 = z'_1 = -z.$$

L'image doublement réfléchie S_2 est symétrique, relativement au méridien POz, de l'image intermédiaire S' qui est elle-même symétrique de S par rapport à Oc, ou Oy''. Les coordonnées $\xi''_2,\ \eta''_2,\ \zeta''_2$ et $\xi_2\, \eta_2\, \zeta_2$ de S' par rapport aux axes $O\,(x''\, y''\, z'')$ et $O\,(x, y, z)$ sont respectivement

$$\xi''_2 = -x'', \quad \eta''_2 = y'', \quad \zeta''_2 = -z'',$$
$$\xi_2 = \xi''_2 \cos \alpha - \eta''_2 \sin \alpha, \quad \eta_2 = \xi''_2 \sin \alpha + \eta''_2 \cos \alpha, \quad \zeta_2 = \zeta''_2.$$

Les coordonnées $x_2,\ y_2,\ z_2$ de S_2 par rapport à $O\,(x\ y\ z)$ sont donc

$$x_2 = -\xi_2 = x \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha,$$
$$y_2 = \eta_2 = -x \sin 2\alpha + y \cos 2\alpha,$$
$$z_2 = \zeta_2 = -z.$$

La distance angulaire $S_1\, S_2 = 2V$ est donnée par

$$\cos V = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = y^2 - x^2 + z^2 = 1 - 2x^2 = 1 - 2 \sin^2 \mathfrak{P} . \sin^2 t$$

ou

$$\sin \frac{V}{2} = \sin \mathfrak{P} . \sin t.$$

La direction de la lunette d'observation, à l'époque $t = 0$ de la coïnci-

dence de S_1, S_2, est définie par les valeurs x_1^0, y_1^0, z_1^0 de x_1, y_1, z_1 à cette époque,

$$x_1^0 = \sin(\mathfrak{L}-\omega)\sin 2\alpha,\quad y_1^0 = \sin(\mathfrak{L}-\omega)\cos 2\alpha,\quad z_1^0 = -\cos(\mathfrak{L}-\omega).$$

Elle forme avec Oz un plan fixe, quelle que soit l'étoile, dont l'angle ψ avec le plan zOy où le méridien est défini par

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{x_1^0}{y_1^0} = \operatorname{tg} 2\alpha \quad \text{ou} \quad \psi = 2\alpha.$$

Elle fait, dans ce plan, avec Oz un angle i défini par

$$\cos i = z_1^0 = -\cos(\mathfrak{L}-\omega) \quad \text{ou} \quad i = 180 + \omega - \mathfrak{L}.$$

Toutes les autres vérifications se feraient avec la même facilité.

On peut encore remarquer que les parallèles menées, par O, aux directions du faisceau lumineux incident et des deux faisceaux réfléchis finalement sont, à chaque instant, sur un cône de révolution dont l'ouverture varie avec t, mais dont l'axe est constamment parallèle aux arêtes du prisme des passages.

4° Il est clair que, par des observations de passage, l'on ferait la théorie des erreurs d'orientation de $O\alpha$ ou du miroir BC, comme on fait celle des erreurs de l'axe de rotation de la lunette méridienne.

38e Exercice.

Étudier le mouvement des différentes pièces du sidérostat de Foucault.

Solution : Il est facile d'analyser d'abord la structure du sidérostat *(fig. 31)* :

1° Un miroir plan est mobile autour d'un axe horizontal. Cet axe est mobile lui-même autour d'un axe vertical fixe. Par suite, le miroir peut tourner librement autour du point de rencontre A des deux axes de rotation.

2° Sur le fond du barillet, portant le miroir, est fixée une tige ABC

perpendiculaire à ce miroir et pouvant glisser dans l'anneau articulé B qui termine la tige OB.

3° Cette tige OB peut prendre toutes les positions autour du point fixe O d'un arbre POP′ dirigé suivant l'axe du monde. L'arbre PP′ peut tourner sur lui-même; il porte un cercle horaire et un cercle de déclinaison qui permettent de caler OB comme une lunette équatoriale, sur la direction d'une étoile quelconque E ou de tout autre astre.

4° Un mouvement d'horlogerie, réglé sur le mouvement diurne de l'astre, fait tourner le système OCBA autour de PP′. Pendant cette rotation, BO passe toujours par E; l'anneau B glisse sur AC qui pivote autour de A en entraînant le miroir.

5° On a pris égales les longueurs invariables OA, OB; de sorte que la lumière envoyée sur le miroir par l'astre E, dans la direction variable EOB, s'y réfléchit dans la direction constante OA que nous supposerons, pour fixer les idées, horizontale et allant du nord au sud.

Sur la sphère céleste de centre O et de rayon OA, considérons le triangle PEA *(fig. 31)*; posons

$$OA = OB = 2l;\quad AB = 2l';\quad \varphi = \text{latitude de O},$$
$$PE = \mathfrak{L},\quad PA = 180^\circ - \varphi,\quad EA = 2\alpha,$$
$$APE = t,\quad PAE = \beta.$$

Le problème consiste à déterminer α, β, l' en fonction de la variable indépendante t ou de l'angle horaire de l'astre. Le triangle sphérique PEA donne immédiatement :

$$(1)\quad \begin{cases} \cos 2\alpha = -\cos\mathfrak{L}\cos\varphi + \sin\mathfrak{L}\sin\varphi\cos t, \\ \sin 2\alpha\cos\beta = \cos\mathfrak{L}\sin\varphi + \sin\mathfrak{L}\cos\varphi\sin t, \\ \sin 2\alpha\sin\beta = \sin\mathfrak{L}\sin t. \end{cases}$$

D'ailleurs, le triangle rectiligne isocèle AOB donne

$$(2)\quad l'^2 = 4l^2\cos^2\alpha = 2l^2(1 - \cos\mathfrak{L}\cos\varphi + \sin\mathfrak{L}\sin\varphi\cos t).$$

Les formules (1) et (2) fournissent : α ou l'angle de AC avec AO; β ou la rotation du triangle OAB autour de OA et l' ou le glissement de la tige AC dans l'anneau B.

Menons le rayon Om parallèle à CA ou à la normale au miroir du côté de la face étamée. Soient $\mathfrak{L}'$, t' la distance polaire et l'angle horaire de la direction Om. Imaginons trois axes rectangulaires : Oz, dirigé suivant OP; Ox, perpendiculaire à PP' dans le méridien et du côté sud; Oy, dirigé à l'ouest; désignons les coordonnées rectilignes de m relatives à ces axes par x, y, z; nous avons

$$(3)\quad x = 2l \sin \mathfrak{L}' \cos t', \quad y = 2l \sin \mathfrak{L}' \sin t', \quad z = 2l \cos \mathfrak{L}',$$

pour définir le mouvement de m sur la sphère, dès que $\mathfrak{L}'$ et t' seront connus en fonction de t. Or, la projection du triangle OAB sur les trois axes coordonnés donne immédiatement :

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{ll} l' \sin \mathfrak{L}' \cos t' &= l\,(\sin \mathfrak{L} \cos t + \sin \varphi), \\ l' \sin \mathfrak{L}' \sin t' &= l \sin \mathfrak{L} \sin t, \\ l' \cos \mathfrak{L}' &= l\,(\cos \mathfrak{L} - \cos \varphi), \end{array}\right.$$

relations qui font connaître l', $\mathfrak{L}'$, t'.

Des égalités (3), (4), on tire celles-ci :

$$(5)\quad \frac{\sin \mathfrak{L} \cos t + \sin \varphi}{x} = \frac{\sin \mathfrak{L} \sin t}{y} = \frac{\cos \mathfrak{L} - \cos \varphi}{z} = \frac{l'}{2l^2},$$

d'où

$$\begin{aligned} z \sin \mathfrak{L} \sin t &= y\,(\cos \mathfrak{L} - \cos \varphi), \\ z \sin \mathfrak{L} \cos t &= x\,(\cos \mathfrak{L} - \cos \varphi) - z \sin \varphi, \end{aligned}$$

et, par suite, éliminant t

$$(6)\quad (x^2 + y^2)(\cos \mathfrak{L} - \cos \varphi) + z^2 (\cos \mathfrak{L} + \cos \varphi) - 2xz \sin \varphi = 0,$$

équation du cône décrit par Om. Ce cône admet, comme plan diamétral, le plan zOx sur lequel la courbe sphérique décrite par m se projette suivant l'hyperbole

$$z^2.\cos \varphi - zx.\sin \varphi + 2l^2 (\cos \mathfrak{L} - \cos \varphi) = 0.$$

Il admet aussi des sections circulaires perpendiculaires à PP'. Il n'est autre chose que le cône ayant A pour sommet et le parallèle de B pour directrice, après une translation représentée par AO.

39e Exercice.

Étudier le mouvement des différentes pièces de l'héliostat de Silbermann.

Un coup d'œil attentif, jeté sur le sidérostat de Foucault, nous a montré que la cinématique de cet instrument se ramène à une question de géométrie élémentaire. Considérons maintenant l'héliostat (*fig. 32*) qui se trouve dans tous les cabinets de physique.

Un mouvement d'horlogerie H, réglé sur le mouvement diurne de l'astre S à observer, fait tourner uniformément un arbre ZZ', à raison d'un tour pour une révolution diurne de S. L'arbre ZZ' se pointe sur le pôle de la sphère céleste par une rotation autour de l'axe horizontal D, suivie d'une rotation de cet axe autour d'un axe fixe vertical C. Voici comment on exécute ces deux rotations successives :

1° Pendant la rotation de ZZ' autour de D, un index, lié perpendiculairement à ZZ', parcourt les divisions d'un petit cercle vertical α' lié concentriquement à D et parallèle à ZZ'; lorsque l'index marque 0°, l'arbre ZZ' est horizontal. On fait tourner ZZ' autour de D jusqu'à ce que l'index marque la latitude φ de l'observateur et on fixe la hauteur de ZZ' par une vis de pression.

2° Un cube b, muni d'une vis de pression, peut à volonté faire corps avec l'arbre ZZ' ou tourner autour de lui en entraînant un index sur les divisions d'un cercle e, centré perpendiculairement sur ZZ', mais lié seulement à la douille qui porte cet arbre.

Un cercle BB', porté par le cube b, peut glisser sur lui-même de telle sorte que son centre O reste immobile sur ZZ' et que son rayon Bn fasse avec ZZ' un angle égal à la distance polaire de S.

L'index du cube b marque 0° lorsque BB' est vertical. On fait tourner le système b, BB' autour de ZZ' jusqu'à ce que cet index marque l'angle horaire de S, répondant au moment marqué pour l'observation.

A ce moment on exécute la rotation de ZZ' autour de l'axe vertical C, jusqu'à ce que le rayon BO passe par S, ou jusqu'à ce que S soit

visible par deux petits trous, presque diamétralement opposés et pratiqués dans BB′ aux extrémités d'une corde parallèle à Bn. Lorsqu'il s'agit du soleil, le trou œilleton reçoit souvent un petit écran diaphane sur lequel doivent se peindre les rayons entrés par l'autre trou, lorsque la deuxième rotation de ZZ′ est achevée. Alors ZZ′ est dirigé sur l'axe du monde et sa position est fixée par des vis de pression qui s'opposent à l'une ou l'autre des deux rotations précédentes.

Au même moment on met en marche le mouvement d'horlogerie qui fait tourner ZZ′ sur lui-même et par suite BO, constamment pointé sur S, autour de l'axe du monde.

Un cube a, muni d'une vis de pression, peut à volonté faire corps avec la douille de ZZ′ ou tourner autour d'elle. Il porte un cercle AA′ de centre O, en lui permettant de glisser sur lui-même. Par rotation de a autour de ZZ′ et glissement de AA′ sur lui-même, on peut diriger le rayon Am de AA′ sur un point quelconque p, fixé à la terre.

Ainsi *(fig. 33)* : O est le centre d'une sphère représentant la sphère céleste ;

ZZ′ un diamètre dirigé suivant l'axe du monde ;

AO un rayon fixe relativement à la terre ;

BO un rayon animé, par un mouvement d'horlogerie, de la rotation diurne d'un astre S autour de ZZ′ ;

Ces deux rayons peuvent tourner sur eux-mêmes et sont articulés en O, autour d'un axe OF, perpendiculaire à leur plan, au moyen de deux fourchettes respectives dont les plans déterminent sur la sphère les grands cercles AF, BF.

Lorsque OB tourne autour de OZ, les plans de ces fourchettes tournent respectivement autour de OA et OB.

Une coulisse rectiligne OI peut tourner en O, autour de OF, dans le plan AOB et reçoit le bouton N réunissant les extrémités N de deux tiges Na, Nb articulées respectivement en a, b sur OA, OB.

Par construction, le quadrilatère NaOb est un losange articulé en ses quatre sommets, qui se déforme dans le plan AOB, pendant la rotation de OB, et dont la coulisse diagonale ONI est toujours bissectrice de l'angle AOB.

Cette coulisse porte, perpendiculairement à sa direction, un miroir

plan qui réfléchit, dans la direction constante AOp, les rayons lumineux qu'il reçoit de l'astre S dans la direction variable SOB.

Les données du mouvement sont :

l = la longueur du côté du losange articulé $OaNb$;
$\alpha = AOZ'$, distance polaire de l'objet p;
$\beta = BOZ'$, distance polaire de l'astre S;
ω = vitesse angulaire de la rotation diurne de cet astre autour de ZZ'.

Les inconnues intéressantes sont :

$2x = \text{arc } AB = 2 \text{ arc } AI$;
Les angles A, B du triangle ABZ';
Le mouvement dans l'espace de la coulisse OI;
Le mouvement du bouton N sur cette coulisse;
Le mouvement de OF qui détermine la rotation des fourchettes autour des rayons OA, OB.

Nous allons les calculer, en comptant le temps t à partir de l'époque où l'astre S franchit le cercle horaire ZAZ' et le point B le cercle horaire opposé ZpZ'.

1° Le triangle sphérique ABZ' donne immédiatement x, A, B par les formules usuelles

$$\cos 2x = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\cos\omega t,$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}\cdot\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\omega t,$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}\cdot\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\omega t.$$

La discussion de x, A, B est absolument la même que celle de la distance zénithale, de l'azimut et de l'angle parallactique d'une étoile pendant son mouvement diurne. Cette discussion sera faite complètement dans les EXERCICES 41, 42 auxquels nous renvoyons.

$\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ est l'angle du miroir avec les plans des fourchettes.

2° Les angles $Z'AF$ et $Z'BF$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2} + A$ et $\frac{\pi}{2} + B$, donnent la position, relative à AZ', du plan de la fourchette f_α qui tourne

autour de OA et la position, relative à BZ′, de la fourchette f_b qui tourne autour de OB.

La relation, $\sin\alpha \sin A = \sin\beta \sin B$, montre que le rapport des vitesses de rotation est donné par la formule

$$\frac{dA}{dB} = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B},$$

et se réduit à l'unité, si $\alpha = \beta$.

Les deux fourchettes tournent d'ailleurs en sens contraire. La fourchette f_a tourne de droite à gauche pour un personnage fictif couché sur OA, les pieds en O et la tête en A; tandis que la fourchette f_b tourne de gauche à droite pour un personnage couché sur OB, les pieds en O et la tête en B.

Pour $t = 0$, les angles A et B sont nuls, les plans des fourchettes sont perpendiculaires à AOZ. Les valeurs de ces angles, à une époque quelconque t, représentent donc les rotations des fourchettes pendant le temps t.

On peut obtenir d'ailleurs et discuter les angles A, B, indépendamment l'un de l'autre par les formules

$$\cot A = (\cot\beta \sin\alpha + \cos\alpha \cos\omega t)\,\operatorname{coséc}\omega t,$$
$$\cot B = (\cot\alpha \sin\beta + \cos\beta \cos\omega t)\,\operatorname{coséc}\omega t,$$

que fournit aussi le triangle ABZ′.

Mais pour la discussion de A, B, $\frac{dA}{dt}$, $\frac{dB}{dt}$, nous renvoyons aux Exercices 41, 42 qui permettront en outre, par un simple changement de notations, d'écrire immédiatement les valeurs de ces quantités en fonction de t, soit sous forme finie, soit sous forme de série convergente ordonnée selon les sinus des multiples de ωt.

3° Le mouvement dans l'espace de la coulisse OI, ou du point I sur la sphère O, est déterminé par les valeurs des coordonnées angulaires A et x de ce point.

Mais le mouvement de la coulisse est défini plus simplement par celui du bouton N dans l'espace.

Le point b décrit uniformément autour de OZ′, avec la vitesse angulaire ω, un cercle de centre c et de rayon $cb = l \sin\beta$. La tige

αN étant constamment égale et parallèle à Ob, le point N décrit aussi, avec la même vitesse constante ω, un cercle de même rayon, dans un plan P perpendiculaire à ZZ′ et dont le centre c' est l'extrémité de la droite ac' égale et parallèle à Oc.

Le plan P coupe le plan AOB suivant une droite RNn, divisée en N dans un rapport constant, puisque ON est bissectrice de l'angle ROn. Le point R est donc le centre d'homothétie des deux cercles décrits par les points N et n. Ainsi :

Tout plan parallèle à l'équateur coupe le cône circulaire droit décrit par OB *et le cône circulaire oblique décrit par* ON *suivant deux cercles dont le centre d'homothétie est sur* OA.

Le plan AOZ′ est un plan principal du cône décrit par ON et contient deux génératrices de ce cône qui sont évidemment symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle AOZ′ et inclinées sur cette bissectrice de $\frac{\beta}{2}\cdot$ Donc :

Les sections circulaires de ce cône, anti-parallèles aux précédentes, sont déterminées par des plans perpendiculaires à la droite fixe AO.

4° Si nous désignons par y la distance rectiligne ON, du point O au bouton N, prise positivement du côté de la face non étamée du miroir, le triangle isocèle NaO donne

$$y = 2l \cos x,$$

ou

$$y^2 = 2l^2 (1 + \cos 2x),$$

c'est-à-dire, en substituant à cos $2x$ sa valeur (1°),

$$y^2 = 2l^2 (1 + \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \cos\omega t),$$

par suite,

$$y \cdot \frac{dy}{dt} = \omega l^2 . \sin\alpha \sin\beta \sin\omega t.$$

On voit facilement que y^2 ne peut jamais s'annuler, sauf dans le

cas singulier où $\alpha + \beta = \pi$, que nous écartons comme étranger à la pratique. y reste donc toujours positif et le signe de $\frac{dy}{dt}$ est celui de $\sin \omega t$.

$$\begin{array}{llll} \text{pour } t = 0, & y = \pm\, 2l \cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = m, & \text{minimum} & \left.\right\} \text{croissant,} \\ \text{—}\quad t = \dfrac{\pi}{\omega} & y = 2l \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = M, & \text{maximum} & \\ & & & \left.\right\} \text{décroissant,} \\ \text{—}\quad t = \dfrac{2\pi}{\omega}, & y = \pm\, 2l \cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = m, & \text{minimum} & \end{array}$$

en prenant le signe + ou le signe — devant l'expression de m suivant que $\alpha + \beta$ est < ou > π.

Pour deux valeurs de t équidistantes de $\frac{\pi}{\omega}$, y prend les mêmes valeurs.

La course du bouton, dans son mouvement rectiligne alternatif sur la glissière normale au miroir, est

$$M - m = 4l \sin \tfrac{1}{2}\alpha \sin \tfrac{1}{2}\beta,$$

ou

$$M - m = 4l \cos \tfrac{1}{2}\alpha \cos \tfrac{1}{2}\beta,$$

suivant que $\alpha + \beta$ est < ou > π.

ωt croissant de 0 à 2π, la vitesse relative de ce mouvement part de 0 et croît aussi jusqu'à l'époque $t = \frac{\pi}{2\omega}$; puis elle décroît jusqu'à l'époque $t = \frac{\pi}{\omega}$, à laquelle elle redevient nulle et le soleil franchit le cercle horaire de Op. Elle devient négative de $t = \frac{\pi}{\omega}$ à $t = \frac{2\pi}{\omega}$ en repassant par les mêmes valeurs, mais en ordre inverse.

LIVRE III

LA TERRE ET LE MOUVEMENT DIURNE

CHAPITRE I

Mouvement diurne d'une seule étoile.

40e Exercice.

Esquisser les principaux traits du mouvement diurne d'une étoile E ($\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$), *observée d'un lieu de colatitude* φ.

Solution : Soient *(fig. 34)* P le pôle de la sphère céleste; Z le zénith du lieu; E une position de l'étoile; z, a, t, q sa distance zénithale, son azimut, son angle horaire, son angle parallactique.

Le triangle PZE donne les trois relations

$$\cos z = \cos\varphi \cos\mathcal{D} + \sin\varphi \sin\mathcal{D} \cos t. \tag{1}$$
$$\cos\mathcal{D} = \cos\varphi \cos z - \sin\varphi \sin z \cos a, \tag{2}$$
$$\cos\varphi = \cos\mathcal{D} \cos z + \sin\mathcal{D} \sin z \cos q. \tag{3}$$

La première lie z et t; la seconde, z et a; la troisième, z et q.

1° Lever et coucher. — Au moment du lever et du coucher, $z = 90°$ et les formules (1), (2) deviennent :

$$\cos t = - \cot\varphi . \cot\mathcal{D}, \tag{4}$$
$$\cos a = - \operatorname{coséc}\varphi . \cos\mathcal{D}. \tag{5}$$

Il y aura réellement un lever et un coucher si les valeurs correspondantes de t, a sont réelles, c'est-à-dire si l'on a les inégalités

$$\cot^2\varphi \cot^2\mathfrak{D} < 1, \qquad \operatorname{coséc}^2\varphi \cos^2\mathfrak{D} < 1,$$

qui se réduisent toutes deux à

(6) $$\frac{\pi}{2} - \varphi < \mathfrak{D}, \qquad \text{si} \quad \mathfrak{D} < 90^\circ,$$

ou à

(7) $$\frac{\pi}{2} - \varphi < \pi - \mathfrak{D}, \qquad \text{si} \quad \mathfrak{D} > 90^\circ,$$

c'est-à-dire, quel que soit $\mathfrak{D}$, à la double inégalité

(8) $$\frac{\pi}{2} - \varphi < \mathfrak{D} < \frac{\pi}{2} + \varphi.$$

Si la condition (8) a lieu, l'étoile a un lever et un coucher. Les formules (4), (5) donnent pour t, a deux valeurs égales, mais de signe contraire entre $-\pi$ et $+\pi$,

$$t = \pm\tau, \qquad a = \pm\alpha.$$

Les valeurs négatives $-\tau$, $-\alpha$ répondent au lever de l'étoile; les valeurs positives $+\tau$, $+\alpha$ répondent à son coucher.

Si la condition (8) n'est pas remplie, l'étoile sera toujours levée ou toujours couchée, c'est-à-dire une circompolaire autour du pôle visible ou du pôle caché, suivant que l'on aura $\mathfrak{D} < 90^\circ$ ou $\mathfrak{D} > 90^\circ$.

Toutes les conditions exprimées par les inégalités précédentes sont évidentes géométriquement. NS (*fig. 35*) étant la ligne nord-sud de l'horizon du lieu, il faut, pour qu'il y ait lever et coucher, que l'étoile traverse le méridien au-dessous de N à son passage inférieur et au-dessus de S à son passage supérieur, c'est-à-dire

$$\mathrm{PN} < \mathfrak{D} < \mathrm{PS},$$

ou la condition (8). L'étoile est toujours levée si $\mathfrak{D} < \mathrm{PN}$, toujours couchée si $\mathfrak{D} > \mathrm{PS}$.

2° Angle sous lequel l'étoile traverse l'horizon à son lever ou à son coucher. — L'angle parallactique q est, à chaque instant,

le complément de l'angle sous lequel l'étoile franchit son vertical ZE ou l'angle même sous lequel elle franchit son *almicantarat,* c'est-à-dire le petit cercle horizontal de la sphère mené par E.

On aura donc l'angle sous lequel l'étoile traverse l'horizon en faisant $z = 90°$ dans la relation (3), ce qui donne

$$\cos q = \cos \varphi \operatorname{coséc} \mathfrak{D}, \tag{9}$$

si l'inégalité (8) a lieu, la formule (9) donnera entre $-\pi$ et $+\pi$ deux valeurs égales et de signes contraires, la négative répondant au lever et la positive au coucher.

3° **Hauteurs méridiennes de l'étoile.** — Si on fait $t = 0$ ou $t = \pi$ dans la relation (1), on obtient la distance zénithale z_s ou z_i de l'étoile à son passage supérieur ou inférieur par la première ou la seconde de ces formules :

$$\cos z_s = \cos(\varphi - \mathfrak{D}), \qquad \cos z_i = \cos(\varphi + \mathfrak{D}),$$

ou bien

$$z_s = \varphi - \mathfrak{D}, \qquad z_i = \varphi + \mathfrak{D},$$

ces distances étant regardées comme positives ou négatives, suivant qu'elles sont comptées à partir de Z vers le pôle nord P ou vers le pôle sud.

4° Pendant toute la révolution diurne de l'étoile, on a l'égalité de rapports

$$\frac{\sin a}{\sin \mathfrak{D}} = \frac{\sin q}{\sin \varphi} = \frac{\sin t}{\sin z},$$

qui montre que $\sin a$ et $\sin q$ restent égaux à un facteur constant près $\sin \mathfrak{D} \operatorname{coséc} \varphi$.

5° A un moment quelconque, q et son complément q' représentent respectivement l'angle sous lequel l'étoile traverse son almicantarat et son cercle vertical ou, en d'autres termes, le fil horizontal et le fil vertical d'un théodolite pointé sur elle.

Lorsque $q = 0$ ou $180°$, l'étoile franchit le méridien et suit le fil horizontal. Lorsque $q = \pm 90°$, elle suit le fil vertical. Pour que cette dernière circonstance se présente, il faut et il suffit que l'on

puisse tirer de

$$\sin a = \sin \mathfrak{P} \operatorname{coséc} \varphi \sin q \quad \text{avec} \quad \sin q = \pm 1$$

une valeur réelle pour a, c'est-à-dire que l'on ait la condition

$$\sin^2 \mathfrak{P} < \sin^2 \varphi,$$

ou φ compris entre $\mathfrak{P}$ et 180° $\mathfrak{P}$. Cette condition étant remplie, les valeurs de a correspondantes à $q = \pm 90°$ sont égales, de signes contraires; la positive représente un minimum de a, après le passage méridien; la négative un maximum de a avant le passage.

On désigne souvent ce maximum et ce minimum de a sous le nom de minimum et maximum d'*élongation*.

41e Exercice.

Pour un lieu de colatitude φ, étudier, dans le mouvement diurne d'une étoile de distance polaire $\mathfrak{P}$, les variations de la distance zénithale z, de l'azimut a et de l'angle parallactique q en fonction de l'angle horaire t.

Solution : Dans le triangle PZE *(fig. 36)* formé, sur la sphère céleste, par le pôle, le zénith du lieu et l'étoile, les côtés,

$$\varphi = \mathrm{PZ}, \quad \mathfrak{P} = \mathrm{PE}, \quad z = \mathrm{ZE},$$

pris en valeur absolue, restent compris entre 0 et π; tandis que les angles

$$t = \mathrm{ZPE}, \quad a = \mathrm{SZE}, \quad q = \mathrm{PEZ},$$

comptés autour de leurs sommets, positivement dans le sens du mouvement diurne et respectivement à partir de PZ, ZS, EP, peuvent varier entre 0 et 2π. Ce triangle donne :

(1) $$\cos z = \cos \varphi \cos \mathfrak{P} + \sin \varphi \sin \mathfrak{P} \cos t,$$

(2) $$-\sin z \cos a = \sin \varphi \cos \mathfrak{P} - \cos \varphi \sin \mathfrak{P} \cos t,$$
(3) $$\sin z \sin a = \sin \mathfrak{P} \sin t,$$

(4) $$\sin z \cos q = \cos \varphi \sin \mathfrak{P} - \sin \varphi \cos \mathfrak{P} \cos t,$$
(5) $$\sin z \sin q = \sin \varphi \sin t,$$

et, par suite,

(6) $$\sin z \frac{dz}{dt} = \sin \mathfrak{L} \sin \varphi \sin t,$$

(7) $$\sin z \frac{da}{dt} = \sin \mathfrak{L} \cos q,$$

(8) $$\sin z \frac{dq}{dt} = \sin \varphi \cos a,$$

(6) par la différentiation de (1); (7) et (8) par la différentiation de (2), (3) et (4), (5) suivie de l'élimination de $\cos z \frac{dz}{dt}$.

Les formules (6), (7), (8) montrent que les dérivées $\frac{dz}{dt}, \frac{da}{dt}, \frac{dq}{dt}$ auront toujours les signes respectifs de $\sin t$, $\cos q$, $\cos a$.

VARIATIONS DE z

Pour $t = 0$ et $t = \pi$, on a, par la formule (1),

$$\cos z = \cos(\varphi - \mathfrak{L}), \quad z = \pm(\varphi - \mathfrak{L}) \begin{cases} +, & \varphi > \mathfrak{L}, \\ -, & \varphi < \mathfrak{L}, \end{cases}$$

et

$$\cos z = \cos(\varphi + \mathfrak{L}), \quad z = \varphi + \mathfrak{L}.$$

$\frac{dz}{dt}$ ayant le signe de $\sin t$, on voit que z croît constamment de son minimum $\pm(\varphi - \mathfrak{L})$ à son maximum $\varphi + \mathfrak{L}$ lorsque t croît de 0 à π, et décroît de $\varphi + \mathfrak{L}$ à $\pm(\varphi - \mathfrak{L})$ lorsque t continue à croître de π à 2π.

VARIATIONS DE a ET q.

$\frac{da}{dt}$ et $\frac{dq}{dt}$ ne peuvent changer de signe qu'avec $\cos q$ et $\cos a$, c'est-à-dire pour les seules valeurs de t qui annulent respectivement ces cosinus. Or, on voit, par les formules (2), (4), que

$\cos a = 0$, seulement pour $\cos t = \operatorname{tg} \varphi \cot \mathfrak{L}$, si $\operatorname{tg}^2 \varphi \cot^2 \mathfrak{L} < 1$;
$\cos q = 0$, — $\cos t = \cot \varphi \operatorname{tg} \mathfrak{L}$, si $\operatorname{tg}^2 \varphi \cot^2 \mathfrak{L} > 1$.

Mais la condition $\operatorname{tg}^2 \varphi \cot^2 \mathfrak{L} < 1$ ou $\operatorname{tg}^2 \varphi < \operatorname{tg}^2 \mathfrak{L}$ a lieu ou non

suivant que $\mathfrak{L}$ est compris ou non entre φ et $180 - \varphi$. Nous distinguerons donc quatre cas.

1er Cas. $\mathfrak{L} < \varphi$ et $180 - \varphi$. Alors $\cos a$ ne s'annule jamais et conserve toujours le même signe, tandis que $\cos q$ peut s'annuler en changeant de signe. Or, les formules (1), (2), (3), (4), (5) montrent que

$$\text{pour } t = 0, \quad z = \varphi - \mathfrak{L}, \begin{cases} \cos a = -1, & \sin a = 0, \quad a = \pi, \\ \cos q = -1, & \sin q = 0, \quad q = \pi, \end{cases}$$

$$\text{pour } \cos t = \cot \varphi . \operatorname{tg} \mathfrak{L}, \quad \Big\{ \cos q = 0, \quad q = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Donc, lorsque t varie de 0 à 2π, q décroît constamment de $+\pi$ à $-\pi$; a décroît d'abord de π jusqu'à un minimum qui a lieu à l'ouest lorsque $q = +\frac{\pi}{2}$, pour croître ensuite jusqu'à un maximum qui a lieu à l'est lorsque $q = -\frac{\pi}{2}$, et enfin décroître jusqu'à π. Les valeurs de t, z, a correspondantes à ce minimum et à ce maximum d'élongation sont données par les formules

$$(9) \quad \cos t = \cot \varphi \operatorname{tg} \mathfrak{L}, \quad \cos z = \cos \varphi . \operatorname{s\acute{e}c} \mathfrak{L}, \quad \sin a = \pm \operatorname{cos\acute{e}c} \varphi . \sin \mathfrak{L}.$$

Le maximum et le minimum de a sont égaux et de signes contraires, à une circonférence près, ainsi que les valeurs correspondantes de t. Les deux valeurs de z sont égales.

2e Cas. $\mathfrak{L} > \varphi$ et $180 - \varphi$. On voit aisément que

$$\text{pour } t = 0, \quad z = \mathfrak{L} - \varphi, \begin{cases} \cos a = +1, & \sin a = 0, \quad a = 0, \\ \cos q = +1, & \sin q = 0, \quad q = 0, \end{cases}$$

$$\text{pour } \cos t = \operatorname{cotg} \varphi . \operatorname{tg} \mathfrak{L}, \quad \Big\{ \cos q = 0, \quad q = \pm \frac{\pi}{2}.$$

D'ailleurs $\cos a$ ne s'annule jamais et conserve toujours le signe *plus*, de sorte que q croît constamment de 0 à 2π avec t. Mais $\cos q$ s'annule en passant du positif au négatif lorsque $q = \frac{\pi}{2}$, et du négatif au positif lorsque $q = 3\frac{\pi}{2}$, de sorte que a croît d'abord de zéro

jusqu'à un certain maximum qu'il atteint pour $q = \frac{\pi}{2}$, décroît ensuite de ce maximum à un minimum atteint pour $q = + 3\frac{\pi}{2}$ et revient enfin de ce minimum à zéro. Les valeurs maxima et minima de a, ainsi que les valeurs correspondantes de t et z sont d'ailleurs données par les équations (9).

3^e^ CAS. $\varphi < \mathfrak{L} < 180 - \varphi$. Dans ce cas, on a

$$\text{pour } t = 0, \quad z = \mathfrak{L} - \varphi, \begin{cases} \cos a = +1, & \sin a = 0, \quad a = 0, \\ \cos q = +1, & \sin q = 0, \quad q = 0, \end{cases}$$

$$\text{pour } \cos t = \operatorname{tg}\varphi . \cot \mathfrak{L}, \quad \Big\} \cos a = 0, \qquad a = \pm\frac{\pi}{2}.$$

On voit que, $\cos q$ ne s'annulant jamais et conservant le signe *plus*, l'azimut a croît constamment de 0 à 2π, tandis que q croît de zéro jusqu'à un maximum atteint lorsque $a = +\frac{\pi}{2}$, décroît ensuite jusqu'à un minimum atteint lorsque $a = + 3\frac{\pi}{2}$ et revient à zéro.

4^e^ CAS. $180^\circ - \varphi < \mathfrak{L} < \varphi$. Alors on a

$$\text{pour } t = 0, \quad z = \varphi - \mathfrak{L} \begin{cases} \cos a = -1, & \sin a = 0, \quad a = \pi, \\ \cos q = -1, & \sin q = 0, \quad q = \pi, \end{cases}$$

$$\text{pour } \cos t = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{cotg} \mathfrak{L}, \quad \Big\} \cos a = 0, \qquad a = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Cos q ne s'annulant jamais et conservant le signe *moins*, l'azimut a décroît constamment de π à $-\pi$, tandis que q décroît de π à un certain minimum atteint lorsque $a = \frac{\pi}{2}$, pour croître ensuite à un certain maximum atteint lorsque $a = -\frac{\pi}{2}$ et enfin décroître jusqu'à π. Le maximum et le minimum de q, égaux et de signes contraires, à une circonférence près, sont d'ailleurs donnés, dans les deux derniers cas, avec les valeurs correspondantes de z et de t, par les formules

$$(10) \quad \cos t = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{cotg}\mathfrak{L}, \quad \cos z = \operatorname{séc}\varphi \cos\mathfrak{L}, \quad \sin q = \pm \sin\varphi \operatorname{coséc}\mathfrak{L},$$

Remarque I. — On peut aussi étudier directement et indépendamment a et q par les formules

$$\operatorname{cotg} \mathfrak{P} \sin \varphi = \cos \varphi \cos t + \sin t \operatorname{cotg} a,$$
$$\operatorname{cotg} \varphi \sin \mathfrak{P} = \cos \mathfrak{P} \cos t + \sin t \operatorname{cotg} q.$$

Remarque II. — Tous ces résultats sont d'ailleurs évidents par la géométrie pure, pour un observateur fictif ayant les pieds en O, au centre de la sphère céleste, et la tête, soit en E, soit en Z, pour suivre la rotation, soit de EZ, soit de ZE autour de E ou Z, par rapport à EP ou ZS pendant que l'étoile accomplit sa révolution diurne.

Corollaire.

Démontrer que la vitesse avec laquelle une étoile s'élève au-dessus de l'horizon d'un lieu donné dépend uniquement de l'azimut de cette étoile.

Solution : Si on désigne par z la distance zénithale, par a l'azimut, par t l'angle horaire de l'étoile et φ la colatitude du lieu, la solution est donnée immédiatement par la relation (6) de l'exercice précédent, mise sous la forme

$$dz = \sin \varphi \sin a . dt.$$

Ainsi toutes les étoiles traversent un même vertical du lieu, avec la même vitesse $\sin \varphi \sin a$ estimée suivant ce vertical, et l'instant de leur passage sur le fil horizontal d'un théodolite, fixé en azimut, peut s'apprécier avec la même exactitude. La vitesse $\frac{dz}{dt}$ est d'ailleurs maxima dans le 1er vertical, pour $a = 90°$.

Il résulte de là que, pour déterminer l'heure sidérale par la méthode des hauteurs correspondantes, il convient de prendre, vers le 1er vertical, une étoile qui traverse le méridien près du zénith ou dont la distance polaire $\mathfrak{P}$ est voisine de φ. Les observations correspondantes se font alors à des intervalles très courts, pendant lesquels on n'a à craindre ni les dérangements de l'instrument, ni les variations de réfraction dues au changement de température ou de pression, ni

enfin les irrégularités insaisissables que cette réfraction présente dans le voisinage de l'horizon.

42e Exercice.

Développer a, q, z en séries convergentes, suivant les sinus ou cosinus des multiples de t.

Solution : I. — Les formules de Delambre, appliquées au triangle PZE, en désignant par A', B', C', a', b', c' les éléments de ce triangle et posant :

$$A' = 180^\circ - a, \quad B' = q, \quad C' = t,$$
$$a' = \mathfrak{L}, \quad b' = \varphi, \quad c' = z,$$
$$k = \frac{\cos \frac{1}{2}(\mathfrak{L} + \varphi)}{\cos \frac{1}{2}(\mathfrak{L} - \varphi)}, \quad k' = \frac{\sin \frac{1}{2}(\mathfrak{L} + \varphi)}{\sin \frac{1}{2}(\mathfrak{L} - \varphi)},$$

donnent :

$$(1) \quad \begin{cases} \operatorname{tg}.\frac{1}{2}(a - q) = k \operatorname{tg} \cdot \dfrac{t}{2}, \\ \operatorname{tg}.\frac{1}{2}(a + q) = k' \operatorname{tg} \cdot \dfrac{t}{2}. \end{cases}$$

Formons

$$n = \frac{k - 1}{k + 1} = -\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \mathfrak{L} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \varphi, \quad n' = \frac{k' - 1}{k' + 1} = \cot \tfrac{1}{2} \mathfrak{L} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \varphi,$$

et distinguons encore quatre cas.

1° $\mathfrak{L} < \varphi$ et $180 - \varphi$. Alors on a :

$$k > 0, \quad n^2 < 1; \qquad k' < 0, \quad n'^2 > 1,$$

et pour $t = 0$,

$$a = \pi, \quad q = \pi, \quad \tfrac{1}{2}(a - q) = 0, \quad \tfrac{1}{2}(a + q) = \pi,$$

par suite, pour une valeur quelconque de t (12e EXERCICE),

$$\tfrac{1}{2}(a - q) = \frac{t}{2} + \frac{n}{1} \sin t + \frac{n^2}{2} \sin 2t + \ldots + \frac{n^p}{p} \sin pt + \ldots,$$
$$\tfrac{1}{2}(a + q) = \pi - \frac{t}{2} - \frac{1}{n'} \sin t - \frac{1}{2n'^2} \sin 2t - \ldots - \frac{1}{p.n'^p} \sin pt - \ldots,$$

d'où

$$a = \pi + \left(n - \frac{1}{n'}\right) \sin t + \tfrac{1}{2}\left(n^2 - \frac{1}{n'^2}\right) \sin 2t + \ldots$$
$$+ \frac{1}{p}\left(n^p - \frac{1}{n'^p}\right) \sin pt + \ldots$$

$$q = \pi - t - \left(n + \frac{1}{n'}\right) \sin t - \tfrac{1}{2}\left(n^2 + \frac{1}{n'^2}\right) \sin 2t - \ldots$$
$$- \frac{1}{p}\left(n^p + \frac{1}{n'^p}\right) \sin pt - \ldots$$

Il est d'ailleurs facile de voir que

$$n^p - \frac{1}{n'^p} = \operatorname{tg}^p \tfrac{1}{2} \mathfrak{L} \, (\pm \operatorname{tg}^p \tfrac{1}{2} \varphi - \cot^p \tfrac{1}{2} \varphi),$$

$$n^p + \frac{1}{n'^p} = \operatorname{tg}^p \tfrac{1}{2} \mathfrak{L} \, (\pm \operatorname{tg}^p \tfrac{1}{2} \varphi + \cot^p \tfrac{1}{2} \varphi),$$

en prenant le signe supérieur ou inférieur suivant que p est pair ou impair.

2° $\mathfrak{L} > \varphi$ et $180 - \varphi$. Alors on a

$$k < 0, \quad n^2 > 1; \qquad k' > 0, \quad n'^2 < 1;$$

et pour $t = 0$,

$$a = 0, \quad q = 0, \quad \tfrac{1}{2}(a - q) = 0, \quad \tfrac{1}{2}(a + q) = 0,$$

par suite, pour une valeur quelconque de t,

$$\tfrac{1}{2}(a - q) = -\frac{t}{2} - \frac{1}{n} \sin t - \frac{1}{2n^2} \sin 2t + \ldots - \frac{1}{pn^p} \sin pt - \ldots,$$

$$\tfrac{1}{2}(a + q) = \frac{t}{2} + n' \sin t + \frac{n'^2}{2} \sin 2t + \ldots + \frac{n'^p}{p} \sin pt + \ldots,$$

d'où

$$a = \left(n' - \frac{1}{n}\right) \sin t + \tfrac{1}{2}\left(n'^2 - \frac{1}{n^2}\right) \sin 2t + \ldots + \frac{1}{p}\left(n'^p - \frac{1}{n^p}\right) \sin pt + \ldots$$

$$q = t + \left(n' + \frac{1}{n}\right) \sin t + \tfrac{1}{2}\left(n'^2 + \frac{1}{n^2}\right) \sin 2t + \ldots + \frac{1}{p}\left(n'^p + \frac{1}{n^p}\right) \sin pt + \ldots$$

3° $\varphi < \mathfrak{L} < 180 - \varphi$. Alors, on a

$$k > 0, \quad n^2 < 1, \quad k' > 0, \quad n'^2 < 1,$$

et pour $t = 0$.

$$a = 0, \quad q = 0, \quad \tfrac{1}{2}(a - q) = 0, \quad \tfrac{1}{2}(a + q) = 0,$$

d'où

$$a = t + (n + n')\sin t + \frac{n^2 + n'^2}{2}\sin 2t + \ldots + \frac{n^p + n'^p}{p}\sin pt + \ldots,$$

$$q = \quad (n' - n)\sin t + \left(\frac{n'^2 - n^2}{2}\right)\sin 2t + \ldots + \frac{n'^p - n^p}{p}\sin pt + \ldots,$$

4° $180 - \varphi < \mathfrak{L} < \varphi$. Alors, on a

$$k < 0, \quad n^2 > 1; \quad k' < 0, \quad n'^2 > 1,$$

et pour $t = 0$,

$$a = \pi, \quad q = \pi, \quad \tfrac{1}{2}(a - q) = 0, \quad \tfrac{1}{2}(a + q) = \pi,$$

par suite, pour une valeur quelconque de t,

$$\tfrac{1}{2}(a - q) = \quad -\frac{t}{2} - \frac{1}{n}\sin t - \frac{1}{2n^2}\sin 2t \ldots - \frac{1}{pn^p}\sin pt - \ldots,$$

$$\tfrac{1}{2}(a + q) = \pi - \frac{t}{2} - \frac{1}{n'}\sin t - \frac{1}{2n'^2}\sin 2t \ldots - \frac{1}{pn'^p}\sin pt,$$

d'où

$$a = \pi - t - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right)\sin t - \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n'^2}\right)\sin 2t \ldots$$
$$- \frac{1}{p}\left(\frac{1}{n^p} + \frac{1}{n'^p}\right)\sin pt \ldots,$$

$$q = \pi + \quad \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right)\sin t + \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right)\sin 2t \ldots$$
$$+ \frac{1}{p}\left(\frac{1}{n^p} - \frac{1}{n'^p}\right)\sin pt \ldots.$$

REMARQUE.

La différentiation, par rapport à t, des formules précédentes donnerait immédiatement les développements en séries de $\frac{da}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$. On peut aussi avoir ces dérivées, sous forme finie, en différentiant les équations (1). On obtient ainsi les formules

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d(a-q)}{dt} &= k\,\frac{\cos^2\frac{a-q}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}} = \frac{k}{\cos^2\frac{t}{2} + k^2\sin^2\frac{t}{2}},\\ \frac{d(a+q)}{dt} &= k'\,\frac{\cos^2\frac{a+q}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}} = \frac{k'}{\cos^2\frac{t}{2} + k'^2\sin^2\frac{t}{2}},\end{aligned}\right.$$

ou

$$\left\{\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \tfrac{1}{2}(k+k')\,\frac{\cos^2\frac{t}{2} + kk'\sin^2\frac{t}{2}}{\left(\cos^2\frac{t}{2} + k^2\sin^2\frac{t}{2}\right)\left(\cos^2\frac{t}{2} + k'^2\sin^2\frac{t}{2}\right)},\\ \frac{dq}{dt} &= \tfrac{1}{2}(k'-k)\,\frac{\cos^2\frac{t}{2} - kk'\sin^2\frac{t}{2}}{\left(\cos^2\frac{t}{2} + k^2\sin^2\frac{t}{2}\right)\left(\cos^2\frac{t}{2} + k'^2\sin^2\frac{t}{2}\right)}.\end{aligned}\right.$$

On a en outre :

$$\frac{k+k'}{2} = \frac{\sin\mathfrak{L}}{\sin(\mathfrak{L}-\varphi)},\quad \frac{k'-k}{2} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\mathfrak{L}-\varphi)},\quad kk' = \frac{\sin(\mathfrak{L}+\varphi)}{\sin(\mathfrak{L}-\varphi)}.$$

On pourrait se proposer, comme exercice de calcul, de retrouver, à l'aide de ces formules, tous les résultats de la discussion du problème précédent.

II. — La formule donnant z en fonction de t

$$\cos z = \cos\varphi\cos\mathfrak{L} + \sin\varphi\sin\mathfrak{L}\cos t,$$

peut s'écrire

$$\cos z = \alpha + \beta \cos t, \tag{2}$$

en posant

$$\alpha = \cos \varphi \cos \mathfrak{L}, \qquad \beta = \sin \varphi \sin \mathfrak{L}$$

et conduit, par la différentiation, à

$$\frac{dz}{dt} = \beta \sin t \, (1 - \cos^2 z)^{-\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Mais

$$(1 - \cos^2 z)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{1} \frac{\cos^2 z}{2} + \frac{1.3}{1.2} \cdot \frac{\cos^4 z}{2^2} + \ldots + \frac{1.3 \ldots (2n-1)}{1.2 \ldots n} \frac{\cos^{2n} z}{2^n} + \ldots,$$

$$\cos^{2n} z = \beta^{2n} \cos^{2n} t + 2n \alpha \beta^{2n-1} \cos^{2n-1} t + \ldots + \frac{2n(2n-1)\ldots(2n-k+1)}{1.2 \ldots k} \alpha^k \beta^{2n-k} \cos^{2n-k} t \ldots + \alpha^{2n}.$$

La substitution dans (3) donne pour $\frac{dz}{dt}$ une série dont le terme général est intégrable, et, par suite,

$$(4) \left\{ \begin{aligned} z = -\sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{k=0}^{k=2n} & \frac{1.3 \ldots (2n-1)}{1.2 \ldots n} \frac{1}{2^n} \\ & \times \frac{2n(2n-1)\ldots(2n-k+2)}{1.2 \ldots k} \alpha^k \beta^{2n-k+1} \cos^{2n-k+1} t. \end{aligned} \right.$$

On n'a plus qu'à remplacer dans (4) les puissances $(2n - k + 1)^e$ de $\cos t$ par leurs expressions en cosinus des multiples de t, pour obtenir z développé en série suivant les mêmes cosinus de ces multiples. Les coefficients de cette série sont donc faciles à former en fonction de α, β ou $\mathfrak{L}$, φ; mais nous laisserons au lecteur le soin de calculer la loi de leur formation.

43e Exercice.

Calculer les dérivées partielles de l'azimut a, de l'angle parallactique q, de la distance zénithale z d'une étoile, considérés

comme fonctions de trois variables indépendantes : la colatitude φ *de l'observateur, la distance polaire* $\mathfrak{L}$ *et l'angle horaire* t *de cette étoile.*

Solution : Le triangle formé par le pôle P, l'étoile E et le zénith Z donne les relations

$$(1)\quad \begin{cases} \cos z = \cos\mathfrak{L}\cos\varphi + \sin\mathfrak{L}\sin\varphi\cos t, \\ \sin z\cos a = -\cos\mathfrak{L}\sin\varphi + \sin\mathfrak{L}\cos\varphi\cos t, \\ \sin z\sin a = \sin\mathfrak{L}\sin t. \end{cases}$$

En formant les différentielles totales des deux dernières, nous avons

$$(2)\quad \begin{cases} \cos z\cos a\,dz - \sin z\sin a\,da = -\sin\mathfrak{L}\cos\varphi\sin t\,dt - \cos z\,d\varphi \\ \qquad\qquad + (\sin\mathfrak{L}\sin\varphi + \cos\mathfrak{L}\cos\varphi\cos t)\,d\mathfrak{L}, \\ \cos z\sin a\,dz + \sin z\cos a\,da = \sin\mathfrak{L}\cos t\,dt + \cos\mathfrak{L}\sin t\,d\mathfrak{L}. \end{cases}$$

D'ailleurs, en vertu d'une formule démontrée (2e EXERCICE),

$$(3)\quad \sin\mathfrak{L}\sin\varphi + \cos\mathfrak{L}\cos\varphi\cos t = \sin a\sin q + \cos a\cos q\cos z.$$

Si, dans les formules (2), on fait successivement : 1° $d\varphi = 0$, $d\mathfrak{L} = 0$; 2° $dt = 0$, $d\mathfrak{L} = 0$; 3° $d\varphi = 0$, $dt = 0$, pour les résoudre par rapport aux différentielles partielles dz et da relatives respectivement à dt, $d\varphi$, $d\mathfrak{L}$, on obtient :

$$1^\circ\quad \cos z\frac{dz}{dt} = \sin\mathfrak{L}(\sin a\cos t - \cos a\sin t\cos\varphi),$$

$$\sin z\frac{da}{dt} = \sin\mathfrak{L}(\cos a\cos t + \sin a\sin t\cos\varphi);$$

$$2^\circ\quad \cos z\frac{dz}{d\varphi} = -\cos a\cos z,$$

$$\sin z\frac{da}{d\varphi} = \sin a\cos z;$$

$$3^\circ\quad \cos z\frac{dz}{d\mathfrak{L}} = \cos a(\sin a\sin q + \cos a\cos q\cos z) + \sin a\cos\mathfrak{L}\sin t,$$

$$\sin z\frac{da}{d\mathfrak{L}} = -\sin a(\sin a\sin q + \cos a\cos q\cos z) + \cos a\cos\mathfrak{L}\sin t;$$

ou, en remplaçant $\cos^2 a$ par $(1 - \sin^2 a)$ et $\sin^2 a$ par $(1 - \cos^2 a)$

respectivement dans la première et la seconde de ces deux dernières formules,

$$\cos z \frac{dz}{d\mathfrak{L}} = \cos q \cos z + \sin a (\sin q \cos a - \cos q \sin a \cos z + \cos \mathfrak{L} \sin t),$$
$$\sin z \frac{da}{d\mathfrak{L}} = -\sin q + \cos a (\sin q \cos a - \cos q \sin a \cos z + \cos \mathfrak{L} \sin t).$$

Mais deux formules élémentaires de la trigonométrie sphérique, savoir :

$$\cos B = -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b,$$
$$\sin B \cos c = \cos C \sin A + \sin C \cos A \cos b,$$

appliquées au triangle PZE, donnent immédiatement

$$\begin{cases} \cos q = \cos a \cos t + \sin a \sin t \cos \varphi, \\ \sin q \cos z = \sin a \cos t - \cos a \sin t \cos \varphi, \\ \sin t \cos \mathfrak{L} = -\cos a \sin q + \sin a \cos q \cos z. \end{cases}$$

On a donc finalement

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = \sin \mathfrak{L} \sin q, & \sin z \dfrac{da}{dt} = \sin \mathfrak{L} \cos q, \\ \dfrac{dz}{d\varphi} = -\cos a, & \sin z \dfrac{da}{d\varphi} = \sin a \cos z, \\ \dfrac{dz}{d\mathfrak{L}} = \cos q, & \sin z \dfrac{da}{d\mathfrak{L}} = -\sin q. \end{cases}$$

Si, au lieu des équations (1), on considère les équations analogues

$$(5) \quad \begin{cases} \cos z = \cos \mathfrak{L} \cos \varphi + \sin \mathfrak{L} \sin \varphi \cos t, \\ \sin z \cos q = \sin \mathfrak{L} \cos \varphi - \cos \mathfrak{L} \sin \varphi \cos t, \\ \sin z \sin q = \sin \varphi \sin t, \end{cases}$$

pour les traiter de la même manière, on obtient

$$(6) \quad \begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = \sin \varphi \sin a, & \sin z \dfrac{dq}{dt} = \sin \varphi \cos a, \\ \dfrac{dz}{d\varphi} = -\cos a, & \sin z \dfrac{dq}{d\varphi} = \sin a, \\ \dfrac{dz}{d\mathfrak{L}} = \cos q, & \sin z \dfrac{dq}{d\mathfrak{L}} = -\sin q \cos z. \end{cases}$$

Mais il est superflu de faire un nouveau calcul. On remarque que l'on passe du système (1) au système (5) en remplaçant dans (1) les quantités a, $\mathfrak{L}$, φ par $(\pi - q)$, φ, $\mathfrak{L}$ et réciproquement. Le même changement dans (4) conduit à (6) et réciproquement.

D'ailleurs tout calcul est inutile et doit être considéré comme un pur exercice de vérification des formules différentielles générales, établies au nº 16 du COURS :

$$\begin{aligned} \delta c &= \cos B\,\delta a + \cos A\,\delta b + \sin a \sin B\,\delta C, \\ \sin c\,\delta A &= \sin B\,\delta a - \sin A \cos c\,\delta b - \cos B \sin a\,\delta C, \\ \sin c\,\delta B &= -\cos c \sin B\,\delta a + \sin A\,\delta b - \sin b \cos A\,\delta C, \end{aligned}$$

qui, pour le triangle PZE, dont nous désignons les éléments par A', B', C', a', b', c', en posant

$$\begin{aligned} a' &= \varphi, & b' &= \mathfrak{L}, & c' &= z, \\ A' &= q, & B' &= 180 - a, & C' &= t, \end{aligned}$$

donnent immédiatement les formules (7)

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} dz &= -\cos a.d\varphi + \cos q.d\mathfrak{L} + \sin\varphi \sin a.dt, \\ \sin z\,dq &= \sin a.d\varphi - \sin q \cos z.d\mathfrak{L} + \sin\varphi \cos a.dt, \\ \sin z\,da &= \sin a \cos z.d\varphi - \sin q.d\mathfrak{L} + \sin\mathfrak{L} \cos q.dt, \end{aligned} \right.$$

équivalentes aux systèmes (4) et (6).

44ᵉ Exercice.

a, q, z étant considérés comme fonctions de $\mathfrak{L}$, φ, t, calculer quelques dérivées secondes, par exemple $\frac{d^2a}{dt^2}$, $\frac{d^2q}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$.

Solution : Nous venons de voir que

$$(1)\quad \sin z \frac{da}{dt} = \sin\mathfrak{L} \cos q, \quad \sin z \frac{dq}{dt} = \sin\varphi \cos a, \quad \frac{dz}{dt} = \sin\mathfrak{L} \sin q.$$

La différentiation des relations (1) donne successivement

$$(2)\quad \begin{cases} \sin z\,\dfrac{d^2a}{dt^2} + \cos z\,\dfrac{dz}{dt}\,\dfrac{da}{dt} = -\sin \mathfrak{L} \sin q\,\dfrac{dq}{dt}, \\ \sin z\,\dfrac{d^2q}{dt^2} + \cos z\,\dfrac{dz}{dt}\,\dfrac{dq}{dt} = -\sin \varphi \sin a\,\dfrac{da}{dt}, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = \sin \mathfrak{L} \cos q\,\dfrac{dq}{dt}. \end{cases}$$

Multiplions les équations (2) par $\sin z$ et remplaçons-y les quantités $\sin z\,\dfrac{da}{dt}\,\dfrac{dz}{dt}$, $\sin z\,\dfrac{dq}{dt}\,\dfrac{dz}{dt}$, $\sin z\,\dfrac{da}{dt}$, $\sin z\,\dfrac{dq}{dt}$ par leurs valeurs tirées de (1), il vient le système (3)

$$(3)\quad \begin{cases} \sin^2 z\,\dfrac{d^2a}{dt^2} + \cos z \sin^2 \mathfrak{L} \sin q \cos q = -\sin \mathfrak{L} \sin q \sin \varphi \cos a, \\ \sin^2 z\,\dfrac{d^2q}{dt^2} + \cos z \sin \varphi \cos a \sin \mathfrak{L} \sin q = -\sin \varphi \sin a \sin \mathfrak{L} \cos q, \\ \sin z\,\dfrac{d^2z}{dt^2} = +\sin \mathfrak{L} \cos q \sin \varphi \cos a, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$\sin^2 z\,\frac{d^2a}{dt^2} = -\sin \mathfrak{L} \sin q\,(\sin \varphi \cos a + \sin \mathfrak{L} \cos q \cos z),$$
$$\sin^2 z\,\frac{d^2q}{dt^2} = -\sin \mathfrak{L} \sin \varphi\,(\sin a \cos q + \cos a \sin q \cos z).$$

Mais, sur le triangle PZE, on a immédiatement

$$\sin \varphi \cos a = -\cos \mathfrak{L} \sin z + \sin \mathfrak{L} \cos z \cos q,$$
$$\sin t \cos \varphi = \sin a \cos q - \cos a \sin q \cos z;$$

par suite, le système (3) peut s'écrire

$$(4)\quad \begin{cases} \sin^2 z\,\dfrac{d^2a}{dt^2} = -\sin \mathfrak{L} \sin q\,(2 \sin \varphi \cos a + \cos \mathfrak{L} \sin z), \\ \sin^2 z\,\dfrac{d^2q}{dt^2} = -\sin \mathfrak{L} \sin \varphi\,(2 \sin a \cos q - \cos \varphi \sin t) \\ \qquad = -\sin \varphi \sin a\,(2 \sin \mathfrak{L} \cos q - \cos \varphi \sin z), \\ \sin z\,\dfrac{d^2z}{dt^2} = \sin \mathfrak{L} \cos q \sin \varphi \cos a. \end{cases}$$

Les relations (4) répondent à la question. La deuxième de ces relations peut se déduire, sans calcul spécial, de la première en y remplaçant

$$a, \quad q, \quad \mathfrak{L}, \quad \varphi \quad \text{par } 180 - q, \quad 180 - a, \quad \varphi, \quad \mathfrak{L},$$

et réciproquement, résultat évident *a priori.*

45ᵉ Exercice.

Les angles a, q, t étant regardés comme fonctions des côtés $\mathfrak{L}$, φ, z, *calculer* $\left(\frac{d^2t}{dz^2}\right)$.

Solution : Pour distinguer les dérivées, calculées précédemment, de a, q, z considérés comme fonctions de $\mathfrak{L}$, φ, t, des dérivées de a, q, t considérés comme fonctions de $\mathfrak{L}$, φ, z, nous envelopperons les dernières d'une parenthèse.

Nous avons vu que

$$\frac{dz}{dt} = \sin\varphi \sin a,$$

donc,

$$\left(\frac{dt}{dz}\right) = \frac{1}{\frac{dz}{dt}} = \frac{1}{\sin\varphi \sin a},$$

par suite,

$$\left(\frac{d^2t}{dz^2}\right) = -\operatorname{cos\acute{e}c}\varphi \frac{\cos a}{\sin^2 a} \cdot \left(\frac{da}{dz}\right);$$

mais on a

$$\frac{da}{dt} = \left(\frac{da}{dz}\right) \cdot \frac{dz}{dt},$$

d'où

$$\left(\frac{da}{dz}\right) = \frac{\cot q}{\sin z},$$

et, par conséquent,

$$\left(\frac{d^2t}{dz^2}\right) = -\operatorname{cos\acute{e}c}\varphi \cdot \frac{\cot a \cot q}{\sin a \sin z} = -\frac{\cot a \cot q}{\sin\varphi \sin\mathfrak{L} \sin t}.$$

46e Exercice.

En un lieu de colatitude φ, on a observé la hauteur h d'une étoile connue E ($\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$). Quelle est l'heure sidérale locale θ de l'observation?

Solution : R étant la réfraction subie par l'étoile, la distance zénithale dans le vide, z, est

$$z = 90° - h + R.$$

L'angle horaire t de l'étoile est donné par la formule

$$\cos t = \frac{\cos z - \cos \mathcal{D} \cos \varphi}{\sin \mathcal{D} \sin \varphi},$$

aisément calculable à l'aide des logarithmes de Gauss.

θ est ensuite fourni par la relation évidente

$$\theta = t + \mathcal{A}.$$

47e Exercice.

On a mesuré rapidement plusieurs distances zénithales voisines z', z'', ... d'une étoile E ($\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$) pour déterminer l'heure sidérale en un lieu de colatitude φ et calculé seulement l'angle horaire t répondant à la distance z mesurée vers le milieu de la série. On propose de trouver les autres angles horaires t', t'', ... répondant à z', z'', ... par l'emploi de formules différentielles et d'évaluer les erreurs ainsi commises.

Solution : Après avoir calculé t par la formule usuelle

$$\cos z = \cos \varphi \cos \mathcal{D} + \sin \varphi \sin \mathcal{D} \cos t,$$

on posera

$$\begin{aligned} t' &= t + dt', & z' &= z + dz', \\ t'' &= t + dt'', & z'' &= z + dz'', \\ &\ldots\ldots & &\ldots\ldots \end{aligned}$$

et on calculera dt', dt'', ... par les relations connues

$$dt' = \left(\frac{dt}{dz}\right) dz', \quad dt'' = \left(\frac{dt}{dz}\right) dz'' \ldots$$

dans lesquelles

$$\left(\frac{dt}{dz}\right) = \frac{\sin z}{\sin \varphi \sin \mathfrak{L} \sin t}.$$

Le logarithme de $\sin \varphi \sin \mathfrak{L}$ ayant été formé déjà pour le calcul de t, on aura $\left(\frac{dt}{dz}\right)$ facilement, par le seul emploi de deux logarithmes, ceux de $\sin z$ et $\sin t$.

D'ailleurs, la série de Taylor donne

$$t' = t + \left(\frac{dt}{dz}\right) dz' + \frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2 t}{dz^2}\right) \overline{dz'}^2 + \ldots,$$
$$t'' = t + \left(\frac{dt}{dz}\right) dz'' + \frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2 t}{dz^2}\right) \overline{dz''}^2 + \ldots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et montre que les erreurs e', e'', ... commises en prenant

$$t' = t + dt', \quad t'' = t + dt'' \ldots,$$

sont sensiblement

$$e' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2 t}{dz^2}\right) \overline{dz'}^2, \quad e'' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2 t}{dz^2}\right) \overline{dz''}^2, \ldots,$$

expressions où l'on a

$$\left(\frac{d^2 t}{dz^2}\right) = -\frac{\cot a . \cot q}{\sin \varphi \sin \mathfrak{L} \sin t}.$$

Si l'on veut que les erreurs commises soient plus petites en valeur absolue que $1''$ de temps ou $15''$ d'angle, il faudra que $\overline{dz'}^2$, $\overline{dz''}^2$ ... soient inférieurs à la valeur absolue de k, en posant

$$k = \frac{30''.\sin \varphi \sin \mathfrak{L} \sin t}{\cot a \cot q},$$

et exprimant dz', dz'', ... en secondes d'arc.

48e Exercice.

Voulant déterminer l'heure sidérale θ, *en un lieu de latitude* φ *avec un chronomètre dont l'état* r *est connu approximativement, par la méthode des hauteurs correspondantes, on a observé une étoile connue* E ($\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$) *sous les distances zénithales* z, z' *qui ne sont pas rigoureusement égales, soit à cause de l'arrivée de quelques nuages qui ont un peu avancé ou retardé l'observation de* z', *soit à cause des variations de température ou de pression qui ont changé la réfraction, soit pour tout autre motif. Tenir compte de la différence entre* z *et* z'.

Solution : Posons

$$z' = z + dz,$$
$$-t' = t + dt,$$

en désignant par t, t' les angles horaires de l'étoile qui répondent à z, z' respectivement.

La formule (5) du nº 224 du Cours donne, en y faisant $d\varphi = 0$, $d\mathcal{D} = 0$,

$$dt = \text{séc}\,\varphi.\text{coséc}\,a.dz = \frac{dz}{\cos\varphi \sin a}.$$

Si T, T', T_m sont les heures du chronomètre correspondantes à z, z' et au moment du passage méridien de l'étoile, on aura

$$T_m = \tfrac{1}{2}(T + T') - \frac{dz}{30 \cos\varphi \sin a},$$

en supposant dz exprimé en secondes d'arc et la marche du chronomètre constante pendant la durée (T' — T) de l'observation.

La correction à apporter à la moyenne arithmétique des époques T et T' est donc d'autant plus faible que l'azimut a de l'étoile est, à ces époques, plus voisin de 90°.

L'état du chronomètre étant connu à peu près, on a $t = T - \mathcal{A} + r$ et, par suite, $\sin a = \sin \mathcal{D} \sin t \,\text{coséc}\, z$, avec une approximation suffisante pour calculer cette petite correction. On emploiera donc la

formule

$$T_m = \tfrac{1}{2}(T + T') - \frac{dz}{30 \cos \varphi \sin \mathfrak{D} \sin t \operatorname{coséc} z},$$

et l'on aura pour l'état exact $r + dr$ du chronomètre, au moment du passage de l'étoile

$$r + dr = \mathcal{R} - T_m,$$

ou

$$dr = \mathcal{R} - T_m - r.$$

49e Exercice.

Calculer les effets apparents de la réfraction sur le mouvement diurne.

Solution : 1° Soient *(fig. 37)* :

P le pôle, Z le zénith du lieu;
$PZ = \varphi$ la colatitude de l'observateur;
$\mathcal{R}$, $\mathfrak{D}$ l'ascension droite et la distance polaire de l'étoile considérée;
E la position vraie de cette étoile, vue dans le vide à l'époque sidérale θ;
E' sa position apparente, vue dans l'air à la même époque.

Connaissant φ, $\mathcal{R}$, $\mathfrak{D}$, θ, on peut calculer les éléments inconnus du triangle PZE, savoir :

$$ZE = z, \quad ZPE = t, \quad PZE = 180 - \alpha, \quad PEZ = q.$$

La réfraction n'altère pas l'azimut α de l'étoile, mais diminue seulement sa distance zénithale z d'une quantité ρ donnée par les tables. On passe de la position E à la position E', ou du triangle PEZ au triangle PE'Z en faisant varier uniquement z de $\delta z = -\rho$. Soient :

$$t + \delta' t = ZPE', \quad \mathfrak{D} + \delta' \mathfrak{D} = PE', \quad q + \delta' q = PE'Z.$$

Pour obtenir immédiatement les effets $\delta' t$, $\delta' \mathfrak{D}$, $\delta' q$ de la réfraction

sur t, $\mathfrak{L}$, q, il suffit de poser

$$A = t, \qquad a = z, \qquad \delta B = 0,$$
$$B = 180 - \alpha, \qquad b = \mathfrak{L}, \qquad \delta a = -\rho,$$
$$C = q, \qquad c = \varphi, \qquad \delta c = 0,$$

dans les formules 4^e du 3^e type, 2^e du 1^er type, 3^e du 3^e type, prises dans le tableau B des relations différentielles, donné au n° 16 du Cours. On obtient ainsi, en négligeant le carré de la réfraction ρ,

$$\delta' t = -\rho \sin q \operatorname{cos\acute{e}c} \mathfrak{L},$$
$$\delta' \mathfrak{L} = -\rho \cos q,$$
$$\delta' q = -\rho \cot \mathfrak{L} \sin q.$$

Comme vérification, menons l'arc de grand cercle $E'a$ perpendiculaire à PE et le triangle $E'Ea$ qu'on peut, à notre degré d'approximation, regarder comme rectiligne et rectangle en a donne :

$$aE' = EE' . \sin E, \qquad aE = EE' \cos E,$$

ou

$$\sin \mathfrak{L} . \delta' t = -\rho \sin q, \qquad \delta' \mathfrak{L} = -\rho \cos q.$$

2° Soit $\theta + \delta\theta$ l'heure sidérale à laquelle la distance zénithale vraie de l'étoile est égale à $z + \delta z$, c'est-à-dire à sa hauteur apparente à l'époque θ. La position vraie de l'étoile est alors E''.

Désignons par $\delta''\alpha$, $\delta'' q$, $\delta'' t$ les variations de α, q, t lorsque l'étoile passe de la position E à la position E'', nous aurons immédiatement, en donnant dans les formules du 1^er type du tableau B aux lettres A, B, C, a, b, c le même sens que précédemment et posant

$$\delta a = -\rho, \qquad \delta b = 0, \qquad \delta c = 0,$$

les relations

$$\delta'' \alpha = -\rho \cot q \operatorname{cos\acute{e}c} z,$$
$$\delta'' q = -\rho \cot \alpha \operatorname{cos\acute{e}c} z,$$
$$\delta'' t = -\rho \operatorname{cos\acute{e}c} q \operatorname{cos\acute{e}c} \mathfrak{L}.$$

Le retard $\delta\theta$, causé par la réfraction, sur le passage apparent de l'étoile par la hauteur z est d'ailleurs

$$\delta\theta = 15 . \delta'' t.$$

En faisant $z = 90°$ dans ces formules, on obtient les effets de la réfraction sur le lever ou le coucher de l'étoile.

Comme vérification, le petit triangle $EE'E''$ donne

$$E'E'' = EE'.\text{tg}\, E, \qquad EE'' = EE' \text{ séc}\, E,$$

ou

$$\sin z . \delta''\alpha = -\rho \cot q, \qquad \sin \mathfrak{L}\, \delta'' t = -\rho \text{ coséc}\, q.$$

3° Calculons encore l'effet de la réfraction sur la réduction au méridien d'un passage observé à un fil quelconque d'une lunette méridienne.

On sait que l'on a très approximativement

$$\rho = k \text{ tg}\, z', \qquad \text{avec } k = 58''.\sin 1'', \qquad z = z' + \rho.$$

Menons par E et E' les arcs de grand cercle $EM = f$, $E'M' = f'$ perpendiculaires à PZ. Les triangles rectangles MEZ, M'E'Z donnent *(fig. 38)*,

$$\sin f = \sin z . \sin \alpha, \qquad \text{ou} \qquad f = \alpha \sin z,$$
$$\sin f' = \sin z' . \sin \alpha, \qquad \text{ou} \qquad f' = \alpha \sin z',$$

par suite,

$$f = f' \cdot \frac{\sin z}{\sin z'};$$

mais

$$z = z' + k \text{ tg}\, z',$$

donne, en négligeant k^2,

$$\sin z = \sin z' + \cos z' . k \text{ tg}\, z' = \sin z' (1 + k),$$

d'où

$$f = f' (1 + k),$$

f', distance au méridien du fil sur lequel E' est observé à l'époque sidérale θ, est une quantité connue.

La réduction au méridien $\delta\theta$ est donc

$$\delta\theta = f \text{ coséc}\, \mathfrak{L} = f' \text{ coséc}\, \mathfrak{L} (1 + k) = f' \text{ coséc}\, \mathfrak{L} + \varepsilon,$$

en posant

(1) $$\varepsilon = k f' \text{ coséc}\, \mathfrak{L}.$$

ε est la correction que la réfraction fait subir à la réduction ordinaire. Si f' désigne la distance au fil moyen V_m du fil d'observation, fixe ou mobile, la formule (1) représente la correction, due à la réfraction, de la réduction ordinaire à V_m.

Cette correction ε prend des valeurs égales et de signes contraires en même temps que f', c'est-à-dire pour deux fils équidistants de V_m. Il est facile de la réduire en table aux arguments f' et $\mathfrak{L}$; sa valeur n'est sensible que pour f' assez grand et $\mathfrak{L}$ assez petit.

Les fils du réticule d'une lunette méridienne étant symétriques relativement à V_m, l'effet de la réfraction se détruit de lui-même pour un astre observé à tous les fils.

Dans l'observation d'une polaire au fil mobile, l'influence de la réfraction sur chaque pointé est beaucoup plus forte que pour toute autre étoile, à cause de la petitesse de $\mathfrak{L}$ et devient sensible dès que f' cesse d'être petit. Il faut alors faire les pointés symétriquement par rapport à V_m, pour que leur moyenne ne soit pas affectée de la réfraction.

SUR UNE FORME GÉOMÉTRIQUE DES EFFETS DE LA RÉFRACTION DANS LE MOUVEMENT DIURNE.

Ce travail est divisé en trois parties bien distinctes :

La première donne à la réfraction dans le mouvement diurne une forme géométrique très simple ;

La deuxième contient quelques remarques sur l'influence de la réfraction dans l'orientation du fil polaire des lunettes équatoriales ;

La troisième est consacrée à des applications numériques.

§ I

1. Pour chaque étoile, nous distinguons deux positions sur la sphère céleste : la *position apparente* ou *vue à travers l'atmosphère*, et la *position vraie* ou *vue à travers le vide*. La différence entre ces deux positions est due à la réfraction astronomique et caractérisée, dans ses principaux traits, par le théorème suivant :

En un jour sidéral, la position apparente d'une étoile décrit une section conique autour de sa position vraie ;

théorème dont la démonstration est facile.

Sur la sphère céleste, ayant pour centre l'œil de l'observateur terrestre, considérons le triangle PZE qui a :

Pour *sommets* : P le pôle boréal de la sphère, Z le zénith de l'observateur, E la position vraie de l'étoile ;

Pour *côtés :* $PZ = \varphi$ la colatitude de l'observateur, $PE = \mathfrak{L}$ la distance polaire de E, $ZE = z$ la distance zénithale de E ;

Pour deux de ses *angles :* $\widehat{ZPE} = t$, l'angle horaire, $\widehat{PEZ} = q$ l'angle parallactique de E, toujours de même signe.

Les quantités z, q, correspondantes à chaque valeur de t, sont fournies par les relations élémentaires

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos z &= \cos\varphi\cos\mathfrak{L} + \sin\varphi\sin\mathfrak{L}\cos t,\\ \sin z\cos q &= \cos\varphi\sin\mathfrak{L} - \sin\varphi\cos\mathfrak{L}\cos t,\\ \sin z\sin q &= \sin\varphi\sin t,\end{aligned}\right.$$

réductibles à deux distinctes, et la position apparente e de l'étoile vue à travers l'atmosphère s'obtient en portant sur EZ le petit arc Ee égal à la réfraction R correspondante à la valeur de z (*fig. 39*).

On sait que de $z=0$ à $z=80°$, et de $z=100°$ à $z=180°$, la formule

$$(2) \qquad R = K \operatorname{tang} z$$

représente sensiblement la réfraction vers le zénith ou le nadir, si l'on prend $K = 58'',3$.

Dans le plan tangent en E à la sphère céleste, rapportons e aux axes coordonnés E (x, y), liés invariablement à cette sphère et dirigés respectivement suivant les tangentes en E au cercle horaire et au parallèle de l'étoile; prises, la première dans le sens austral, et la seconde dans le sens occidental.

Les coordonnées x, y de e sont évidemment

$$x = -R\cos q, \qquad y = -R\sin q;$$

et, si l'on pose $X = \frac{x}{K}$, $Y = \frac{y}{K}$, on voit immédiatement, par les formules (1), (2), que

$$(3) \qquad X = -\operatorname{tang} z \cos q = \frac{\operatorname{tang}\varphi \cos \mathfrak{L} \cos t - \sin \mathfrak{L}}{\operatorname{tang}\varphi \sin \mathfrak{L} \cos t + \cos \mathfrak{L}},$$

$$(4) \qquad Y = -\operatorname{tang} z \sin q = \frac{-\operatorname{tang}\varphi \sin t}{\operatorname{tang}\varphi \sin \mathfrak{L} \cos t + \cos \mathfrak{L}};$$

la relation (3) peut s'écrire

$$(5) \qquad \operatorname{tang}\varphi \cos t\,(X \sin \mathfrak{L} - \cos \mathfrak{L}) = -(X \cos \mathfrak{L} + \sin \mathfrak{L}),$$

et l'élimination de $\cos t$ entre (3), (4) conduit à

$$(6) \qquad \operatorname{tang}\varphi \sin t\,(X \sin \mathfrak{L} - \cos \mathfrak{L}) = Y.$$

En élevant (5) et (6) au carré, pour les ajouter membre à membre, on obtient, comme trajectoire de e autour de E, la conique

$$(7) \qquad \operatorname{tang}^2\varphi\,(x \sin \mathfrak{L} - K \cos \mathfrak{L})^2 = y^2 + (x \cos \mathfrak{L} + K \sin \mathfrak{L})^2,$$

c'est-à-dire une *ellipse*, une *parabole*, une *hyperbole*, suivant que $\sin^2 \mathfrak{L}$ sera *inférieur*, *égal*, *supérieur* à $\cos^2 \varphi$.

Ainsi, en un lieu de colatitude φ, le mouvement propre, dû à la réfraction, est le même qu'au lieu antipode de colatitude $180° - \varphi$: *elliptique* pour les étoiles circompolaires qui sont toujours soit levées,

soit couchées; *parabolique* pour celles qui rasent l'horizon soit en dessus, soit en dessous; *hyperbolique* pour celles qui se lèvent et se couchent. Dans ce dernier cas, les deux branches de l'hyperbole décrite par une étoile *e* ne sont visibles, l'une que du lieu de colatitude φ, l'autre que du lieu antipode, et *e* passe d'une branche à l'autre en traversant l'horizon commun à ces deux lieux.

Il est clair, d'ailleurs, que les arcs de parabole ou hyperbole *réellement* décrits par *e* s'arrêtent aux points correspondants à $z = 80^\circ$ ou $z = 100^\circ$, entre lesquels la réfraction n'est plus représentée sensiblement par K tang z.

En résolvant l'équation (7) par rapport à y^2, remplaçant la différence des deux autres termes carrés par le produit de la somme et de la différence des premières puissances, ramenant à l'unité le coefficient de x dans chaque facteur, et posant

$$(8)\quad R_s = K \operatorname{tang}(\mathfrak{L} - \varphi),\quad R_i = K \operatorname{tang}(\mathfrak{L} + \varphi),\quad R_0 = K \operatorname{tang}\varphi,$$

on a d'abord

$$(9)\quad y^2 = -\operatorname{séc}^2\varphi \cos(\mathfrak{L} - \varphi)\cos(\mathfrak{L} + \varphi)(x + R_s)(x + R_i);$$

puis, en remarquant que les formules (8) donnent la relation

$$(10)\quad (R_s - R_i)\operatorname{séc}^2\varphi \cos(\mathfrak{L} - \varphi)\cos(\mathfrak{L} + \varphi) = -2K \operatorname{tang}\varphi = -2R_0,$$

on a finalement

$$(11)\qquad y^2(R_i - R_s) + 2R_0(x + R_i)(x + R_s) = 0,$$

équation de la conique, dans laquelle les coefficients sont formés simplement avec R_s, R_i, R_0, c'est-à-dire avec les réfractions de l'étoile à son passage supérieur, à son passage inférieur et la réfraction du pôle assimilé à une étoile; chaque réfraction étant prise d'ailleurs avec le signe que lui attribue la définition (8) correspondante.

Il est facile, en formant $(K^2 + R_i R_s)$ au moyen des deux premières définitions (8), ce qui donne

$$(12)\quad (K^2 + R_i R_s)\cos(\mathfrak{L} - \varphi)\cos(\mathfrak{L} + \varphi) = K^2\cos 2\varphi = K^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi),$$

et en divisant (10) par (12) membre à membre, d'établir la relation

$$(13)\qquad (R_i - R_s)(R_0^2 - K^2) + 2R_0(R_i R_s + K^2) = 0,$$

qui lie K, R_s, R_i, R_0.

2. Les coordonnées x_0, y_0 du centre C de la conique (11) sont données par les formules

$$x_0 = -\tfrac{1}{2}(R_s + R_i), \quad y_0 = 0,$$

et, si l'on y transporte, parallèlement à eux-mêmes, les axes des x, y, en posant

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta,$$

l'équation de la trajectoire apparente de l'étoile, rapportée à ses axes de symétrie, devient

$$(14) \qquad \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1,$$

en posant

$$(15) \quad 2a = R_i - R_s, \quad \frac{b^2}{a} = R_0; \quad \text{d'où} \quad \frac{b^2}{a^2} = \cos^2\mathfrak{L}\,(1 - \text{tang}^2\varphi\,\text{tang}^2\mathfrak{L}).$$

3. L'excentricité c de cette conique est donnée par la formule

$$c^2 = 1 - \frac{R_0}{a} = 1 - (\cos^2\varphi\sin^2\mathfrak{L})\,\text{séc}^2\varphi = 1 - \cos^2\mathfrak{L}\,(1 - \text{tang}^2\mathfrak{L}\,\text{tang}^2\varphi).$$

Pour le pôle céleste, assimilé à une étoile, la conique se réduit au cercle

$$\xi^2 + \eta^2 = R_0^2,$$

qui se réduit lui-même au point $\xi = 0$, $\eta = 0$, pour l'observateur situé au pôle terrestre.

Les foyers de la conique sont situés sur l'axe Ex. Les sommets, situés sur cet axe, sont à des distances respectives x_s, x_i, de E exprimées par

$$x_s = -R_s, \quad x_i = -R_i.$$

Le point E est entre ces sommets si R_i, R_s sont de signes contraires, c'est-à-dire si les extrémités des arcs $(\mathfrak{L} - \varphi)$, $(\mathfrak{L} + \varphi)$ tombent dans deux quadrants adjacents du cercle trigonométrique ; il est en deçà ou au delà par rapport au pôle P de la sphère céleste, suivant que R_i, R_s sont tous deux négatifs ou positifs, c'est-à-dire suivant que $(\mathfrak{L} - \varphi)$, $(\mathfrak{L} + \varphi)$ tombent soit dans les 2e et 4e, soit dans les 1er et 3e quadrants.

4. Loi du mouvement sur la conique. — La loi est donnée par les expressions de x et y en fonction de t, tirées de (3), (4), ou par

celles de ξ, η, savoir :

$$\xi = x - x_0 = \mathrm{K}\,\frac{\text{séc}\,\mathfrak{L}\,\text{coséc}\,\mathfrak{L}}{1 - \text{tang}^2\mathfrak{L}\,\text{tang}^2\varphi}\,\frac{\cos t + \text{tang}\,\mathfrak{L}\,\text{tang}\,\varphi}{\cos t + \cot\mathfrak{L}\cot\varphi},$$

$$\eta = y - y_0 = -\mathrm{K}\,\text{coséc}\,\mathfrak{L}\,\frac{\sin t}{\cos t + \cot\mathfrak{L}\cot\varphi},$$

faciles à former, après quelques réductions, ainsi que leurs dérivées

$$(16)\qquad \frac{d\xi}{dt} = \frac{dx}{dt} = -\mathrm{K}\cot\varphi\,\text{coséc}^2\mathfrak{L}\,\frac{\sin t}{(\cos t + \cot\mathfrak{L}\cot\varphi)^2},$$

$$(17)\qquad \frac{d\eta}{dt} = \frac{dy}{dt} = -\mathrm{K}\cot\varphi\,\text{coséc}^2\mathfrak{L}\cos\mathfrak{L}\,\frac{(\cos t + \text{tang}\,\mathfrak{L}\,\text{tang}\,\varphi)}{(\cos t + \cot\mathfrak{L}\cot\varphi)^2}.$$

Appelons θ l'angle formé, avec la direction $\mathrm{E}x$, par le rayon vecteur de la conique, issu du centre C; cet angle étant compté autour de C à partir de $\mathrm{E}x$, comme t autour de P, positivement dans le sens rétrograde ou de gauche à droite pour un personnage fictif ayant les pieds au centre de la sphère céleste et la tête en C. On a

$$\text{tang}\,\theta = \frac{\eta}{\xi} = m\,\frac{\sin t}{\cos t + \text{tang}\,\mathfrak{L}\,\text{tang}\,\varphi},\quad \text{avec } m = \cos\mathfrak{L}(\text{tang}^2\mathfrak{L}\,\text{tang}^2\varphi - 1),$$

et, par suite,

$$(18)\qquad \frac{d\theta}{dt} = \sin\mathfrak{L}\,\text{tang}\,\varphi\,(\text{tang}^2\mathfrak{L}\,\text{tang}^2\varphi - 1)\,\frac{(\cos t + \cot\mathfrak{L}\cot\varphi)}{(\cos t + \text{tang}\,\mathfrak{L}\,\text{tang}\,\varphi)^2}\cos^2\theta.$$

Distinguons trois cas :

1° $\text{tang}^2\mathfrak{L}\,\text{tang}^2\varphi < 1$. — L'étoile apparente e est circompolaire et décrit des ellipses relatives autour de E. Le signe de $\frac{d\theta}{dt}$ sera toujours contraire à celui de

$$\text{tang}\,\varphi\,(\cos t + \cot\mathfrak{L}\cot\varphi) \quad \text{ou de} \quad \text{tang}\,\varphi\cot\varphi\cot\mathfrak{L},$$

c'est-à-dire de $\cot\mathfrak{L}$, puisque le facteur $(\cos t + \cot\mathfrak{L}\cot\varphi)$ ne peut s'annuler et a toujours le signe de $\cot\mathfrak{L}\cot\varphi$.

L'étoile apparente e décrit son ellipse dans le sens direct ou rétrograde suivant que l'étoile vraie E *est boréale ou australe.*

2° $\text{tang}^2\mathfrak{L}\,\text{tang}^2\varphi = 1$. — L'étoile rase l'horizon au-dessus ou

au-dessous, suivant qu'elle est boréale ou australe, et décrit une parabole.

La parabole est décrite dans le sens direct ou rétrograde suivant que l'étoile est boréale ou australe.

3° $\tang^2 \mathfrak{L} \tang^2 \varphi > 1$. — L'étoile se lève et se couche en décrivant une hyperbole. Le signe de $\frac{d\theta}{dt}$ est toujours celui de

$$\tang \varphi (\cos t + \cot \mathfrak{L} \cot \varphi);$$

c'est-à-dire celui de $\tang \varphi$, du lever au coucher; et de $-\tang \varphi$, du coucher au lever. $\frac{d\theta}{dt}$ change de signe lorsque l'étoile e traverse l'horizon en sautant d'une branche à l'autre de son hyperbole.

L'étoile e décrit, du lever au coucher, une branche de son hyperbole dans le sens rétrograde ou direct et, du coucher au lever, l'autre branche dans le sens direct ou rétrograde, suivant que l'observateur est boréal ou austral.

5. Mouvement résultant. — La composition du mouvement relatif de l'étoile e sur sa conique, autour E, avec le mouvement d'entraînement de E ou de la sphère céleste, donne le mouvement apparent ou résultant de l'étoile, tel qu'il est observé à l'équatorial.

Lorsque $\mathfrak{L}$ tend vers 0° ou 180°, $\frac{d\theta}{dt}$ tend vers -1 ou $+1$. Si donc l'étoile E est très voisine d'un pôle, les mouvements relatif et d'entraînement ➘ 1 et ➘ 2 *(fig. 40 et 41)* sont sensiblement circulaires et uniformes, de même vitesse absolue, mais de sens contraires. Le mouvement résultant ➘ 3 est de même sens que ➘ 2, aussi sensiblement circulaire et uniforme autour de la position apparente p de P, position qui se construit en prenant sur le méridien de l'observateur l'arc $Pp = R_0$. Si E est au pôle même, les cercles ➘ 2, ➘ 3 se réduisent aux points P, p, et ➘ 1 est un cercle décrit de P comme centre avec R_0 pour rayon.

Ainsi la réfraction change tout : position de l'étoile, grandeur et

direction de la vitesse de son mouvement diurne. Au point m d'élongation maxima, par rapport à P, du mouvement diurne apparent d'une étoile voisine du pôle, la direction de ce mouvement est celle du cercle horaire vrai Pm de ce point.

Désignons *(fig. 39)* par v la vitesse linéaire diurne résultante de e sur la sphère céleste; par i l'angle, avec Ey, de la parallèle Ev à sa direction, angle compté de Ey autour de E, comme t autour de P, c'est-à-dire positivement dans le sens rétrograde. Les vitesses linéaires relatives et d'entraînement de e, estimées suivant les axes Ex, Ey, étant respectivement $\frac{dx}{dt}$ et o, $\frac{dy}{dt}$ et $\sin \mathfrak{L}$, en prenant pour unité la vitesse diurne vraie d'une étoile équatoriale, on a évidemment

$$v \sin i = -\frac{dx}{dt}, \quad v \cos i = \sin \mathfrak{L} + \frac{dy}{dt},$$

d'où l'on tire les séries

$$v = \sin \mathfrak{L}\left(1 + \alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1.3}{2.3}\alpha^3 - \frac{1.3.5}{2.3.4}\alpha^4 + \ldots\right),$$

$$\operatorname{tang} i = -\frac{dx}{dt} \operatorname{coséc} \mathfrak{L}\,(1 - \beta + \beta^2 - \beta^3 + \beta^4 - \ldots),$$

en posant

$$2\alpha = 2 \operatorname{coséc} \mathfrak{L} \frac{dy}{dt} + \operatorname{coséc}^2 \mathfrak{L} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

$$\beta = \operatorname{coséc} \mathfrak{L} \frac{dy}{dt}.$$

Reportons-nous un instant aux expressions (16), (17) de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$.

Si coséc $\mathfrak{L}$ n'est pas très grand et si, en outre, $(\cos t + \cot \mathfrak{L} \cot \varphi)$ n'est pas très petit, c'est-à-dire si l'étoile n'est ni une circompolaire trop voisine du pôle, ni prise trop près de l'horizon par l'observateur, α et β seront inférieurs à l'unité en valeur absolue, généralement de l'ordre de K, pour tout lieu φ habitable. Sous ces conditions, celles mêmes de la pratique ordinaire, les séries précédentes sont applicables

et se réduisent, après suppression des petits termes, en K^2, K^3, ..., à

(19) $v = \sin \mathfrak{L} + \frac{dy}{dt}$,

(20) $i = \operatorname{tang} i = -\operatorname{cos\acute{e}c} \mathfrak{L} \frac{dx}{dt} = K \operatorname{tang} \varphi \operatorname{cos\acute{e}c} \mathfrak{L} \cos^2 \psi \operatorname{s\acute{e}c}^2 (\mathfrak{L} - \psi) \sin t$,

en posant

$$(21) \qquad \operatorname{tang} \psi = \operatorname{tang} \varphi \cos t;$$

d'où résulte

$$\cos^2 \psi \operatorname{s\acute{e}c}^2 (\mathfrak{L} - \psi) = \cot^2 \varphi \operatorname{cos\acute{e}c}^2 \mathfrak{L} (\cos t + \cot \varphi \cot \mathfrak{L})^{-2}.$$

L'angle ψ n'est pas autre chose que la projection sphérique de PZ ou φ sur le cercle horaire PE.

L'angle i a toujours le signe de $\sin t$ ou $-\sin t$, suivant que l'observateur est ou non dans notre hémisphère boréal. Il s'annule lorsque l'étoile traverse le méridien. Il prend des valeurs égales et de signes contraires en même temps que t. Lorsque l'étoile se lève ou se couche, $(1 + \operatorname{tang} \mathfrak{L} \operatorname{tang} \varphi \cos t)$ est nul et la formule (20) donnerait $i = 90^\circ$, si elle était encore applicable; ce qui n'a lieu évidemment qu'entre les limites de t correspondantes à $z = 0^\circ$, 80° ou $z = 100^\circ$, 180°.

Il est facile de discuter l'angle i en calculant ses dérivées partielles $\frac{di}{dt}$, $\frac{di}{d\mathfrak{L}}$.

1° $\frac{di}{dt}$. — On trouve aisément

$$(22) \quad \frac{di}{dt} = K \cot\varphi \operatorname{cos\acute{e}c}^3 \mathfrak{L} (\cos t + \cot \mathfrak{L} \cot \varphi)^{-3} (2 + \cot \mathfrak{L} \cot \varphi \cos t - \cos^2 t).$$

Cette expression de $\frac{di}{dt}$ ne devient infinie que pour le passage de l'étoile par l'horizon, passage qu'il faut écarter; et elle ne s'annule que pour les valeurs de t qui vérifient l'équation

$$(23) \qquad \cos^2 t - \cot \mathfrak{L} \cot \varphi \cos t - 2 = 0.$$

Cette équation est toujours satisfaite par deux valeurs réelles $\cos t_1$,

cos t_2 de cos t, l'une négative, l'autre positive, séparables par les substitutions dont voici le Tableau :

	cos t.	m.	m.		
			$\omega^2 < 1$.	$\omega < -1$.	$\omega > 1$.
	$-\infty$	$+\infty$	$+$	$+$	$+$
				↠	
(si $\omega < -1$)	ω	-2	↠	$-$	
	-1	$-1+\omega$	$-$	$-$	$+$
					↠
	0	-2	$-$	$-$	$-$
				↠	
	$+1$	$-1-\omega$	$-$	$+$	$-$
(si $\omega > 1$)	ω	-2	↠		$-$
					↠
	$+\infty$	$+\infty$	$+$	$+$	$+$

dans lequel m est la valeur du premier membre de (23) pour la valeur correspondante de cos t et $\omega = \cot\varphi \cot \mathfrak{L}$. Le signe ↠ indique les intervalles où tombent les racines cos t_1, cos t_2 pour les trois hypothèses $\omega^2 < 1$, $\omega < -1$, $\omega > 1$.

Pour $\omega^2 < 1$, c'est-à-dire pour les étoiles qui se lèvent et se couchent, t_1 et t_2 sont imaginaires. L'angle i n'a ni maximum ni minimum; il croît ou décroît constamment du lever au coucher et décroît ou croît constamment du coucher au lever, suivant que l'observateur est boréal ou austral.

Pour $\omega < -1$, c'est-à-dire pour les circompolaires toujours invisibles, t_1 est imaginaire, et t_2 a deux valeurs réelles, l'une $-\tau$, entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0° correspondante à un minimum ou maximum de i, l'autre $+\tau_2$ correspondante à un maximum ou minimum, suivant que l'observateur est boréal ou austral.

Pour $\omega > 1$, c'est-à-dire pour les circompolaires toujours visibles, t_2 est imaginaire, et t_1 a deux valeurs réelles, l'une $-\tau_1$ entre $-\pi$ et $-\frac{\pi}{2}$ correspondante à un minimum ou maximum, l'autre $+\tau_1$ correspondante à un maximum ou minimum, suivant que l'observateur est boréal ou austral.

2° $\frac{di}{d\mathfrak{L}}$. — On met aisément cette dérivée sous la forme

(24) $$\frac{di}{d\mathfrak{L}} = \mathrm{K}\,(\cot\varphi\cot\mathfrak{L})^2.\mathrm{coséc}^3\,\mathfrak{L}\sin t.\alpha^{-3}\,\beta,$$

en posant

(25) $$\alpha = \cos t + \cot\varphi\cot\mathfrak{L},$$

(26) $$\beta = 2\,\mathrm{tang}^2\,\mathfrak{L} - 3\,\mathrm{tang}\,\varphi\,\mathrm{tang}\,\mathfrak{L}\cos t - 1.$$

Le signe de $\frac{di}{d\mathfrak{L}}$ ne change qu'avec celui de $\alpha^{-3}\,\beta$, lorsque, t et φ étant fixes, $\mathfrak{L}$ varie de 0 à π en passant par la valeur p qui annule α; c'est-à-dire lorsqu'on imagine l'étoile E aller du pôle boréal au pôle austral en décrivant le cercle horaire et traversant l'horizon définis respectivement par t et φ.

Si l'on donne à $\mathfrak{L}$ les valeurs $0, p, \pi$, on obtient pour β les valeurs -1, $2\,\mathrm{séc}^2\,p$, -1. L'équation $\beta = 0$ a donc deux racines réelles comprises entre 0 et π et séparées par p. Désignons la plus petite par $\mathfrak{L}_1$ et la plus grande par $\mathfrak{L}_2$.

L'étoile allant du pôle boréal à l'horizon ou $\mathfrak{L}$ de 0° à p, le signe de α reste celui de $\cot\varphi$, tandis que le signe de β passe du négatif au positif lorsque $\mathfrak{L}$ passe par $\mathfrak{L}_1$. Le signe de $\frac{di}{d\mathfrak{L}}$ est donc celui de $-\cot\varphi\sin t$ ou de $+\cot\varphi\sin t$, suivant que $\mathfrak{L}$ est entre 0 et $\mathfrak{L}_1$ ou entre $\mathfrak{L}_1$ et p. Autrement dit, pour $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1$, l'angle i passe par un maximum ou un minimum suivant que $\cot\varphi\sin t$ est négatif ou positif.

L'étoile allant de l'horizon au pôle austral ou $\mathfrak{L}$ de p à 180°, le signe de α reste celui de $-\cot\varphi$, tandis que le signe de β passe du positif au négatif lorsque $\mathfrak{L}$ passe par $\mathfrak{L}_2$. Pour $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_2$, l'angle i passe donc encore par un maximum ou un minimum, suivant que $\cot\varphi\sin t$ est négatif ou positif.

6. La Table I, aux arguments t et $\mathfrak{L}$, construite pour la colatitude de l'observatoire de Besançon, $\varphi = 42°\,46'$, permet de vérifier numériquement les résultats de la discussion des dérivées $\frac{di}{dt}$, $\frac{di}{d\mathfrak{L}}$.

Table I.

i''.

L'angle i doit être pris avec le signe de t. Il est donné en secondes d'arc.

$\mathfrak{L}$.	t.												
	0h	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	12h
10°	″	62	124	183	238	286	322	339	331	292	219	118	″
20	″	26	54	84	114	147	179	208	226	220	180	103	″
30	″	16	34	54	78	108	144	188	234	266	253	162	″
40	″	12	26	42	64	96	144	218	335	507	686	571	″
45	″	11	24	40	62	96	154	257	465	929	1887		
50	″	10	22	38	61	100	171	325	748	2415			
55	″	10	22	38	63	108	201	452	1435				
60	″	10	22	39	67	121	251	712					
65	″	10	23	41	73	141	335	1385					
70	″	11	24	44	82	173	494	3859					
75	″	11	26	50	97	225	839						
80	″	13	29	58	120	315	1692						
85	″	15	34	70	156	492							
90	″	17	42	89	217	904							
95	″	22	53	119	333	2090							
100	″	28	72	173	546								
105	″	39	104	280	1241								
110	″	59	167	495									
115	″	101	316	1298									
120	″	194	740										
125	″	600											

§ II

APPLICATION AUX OBSERVATIONS ÉQUATORIALES.

7. Les considérations précédentes cessent d'être exactes lorsque l'étoile est très voisine du pôle ou de l'horizon. Mais, en dehors de ces cas exceptionnels qui se rencontrent rarement dans la pratique, elles s'appliquent aux observations équatoriales.

Le micromètre d'une lunette équatoriale se réduit théoriquement à deux fils rectangulaires : le *fil polaire mobile* et le *fil horaire moyen*, le premier réel et le second fictif.

Lorsque l'*astre* à relever est assez loin de l'horizon pour que l'angle i soit négligeable, on oriente le fil polaire sur le mouvement diurne apparent de l'*étoile de comparaison* et on le regarde comme orienté sur le mouvement diurne vrai.

Mais si l'astre est voisin de l'horizon, l'angle i n'est plus négligeable et l'on a généralement l'habitude d'orienter alors le fil polaire sur le mouvement factice qu'on donne à l'étoile dans le champ, en faisant varier rapidement, par quelques légers coups de manette, l'angle horaire de la lunette, fixée d'ailleurs en distance polaire. Par cette manœuvre, on cherche encore à orienter le fil sur le mouvement diurne vrai, mais on n'y parvient que si l'axe horaire de la lunette est bien rectifié ou pointé sur le pôle.

Cette rectification est longue, pénible et même peu précise pour la plupart des équatoriaux dont les vis de réglage ne sont pas très soignées ni très maniables. En outre, elle doit être répétée fréquemment, à cause de l'instabilité des lunettes équatoriales. Bien des discordances entre les positions d'un même astre, voisines de l'horizon et relevées par des instruments divers, proviennent probablement d'une rectification défectueuse.

Aussi nous semble-t-il bon, surtout pour les petits équatoriaux, d'abandonner entièrement l'orientation du fil polaire sur le mouvement diurne vrai au moyen de la manette horaire, lorsqu'il s'agit d'observer près de l'horizon et d'orienter ce fil, *dans tous les cas,* sur le mouvement diurne apparent de l'étoile de comparaison ; sauf à ramener, par le calcul, l'observation à ce qu'elle eût été avec un fil orienté sur le mouvement diurne vrai.

De cette manière, on remplacera la rectification de l'instrument, ou tout au moins sa vérification : c'est-à-dire une manœuvre d'exactitude douteuse, impossible au moment de l'observation pour lequel elle serait le plus nécessaire, prenant un temps quelquefois précieux, par une simple correction numérique d'exactitude certaine et facile à trouver dans une Table construite à l'avance, une fois pour toutes, en chaque observatoire. On éliminera ainsi, totalement et d'un seul coup, les nombreux défauts d'installation, de rigidité, de stabilité

d'un équatorial, dont les cercles gradués n'auront plus dès lors d'autre objet que le calage.

8. Soient

$\Delta\alpha$, $\Delta\mathfrak{L}$ les différences exactes, en ascension droite et distance polaire, entre l'astre observé et l'étoile de comparaison, formées dans le sens *astre — étoile;*

$\Delta'\alpha$, $\Delta'\mathfrak{L}$ les différences, évaluées dans le même sens et observées avec un micromètre dont le fil polaire est orienté sur le mouvement diurne apparent de l'étoile ;

$\delta_1\alpha$, $\delta_1\mathfrak{L}$ les corrections nécessaires sur $\Delta'\alpha$, $\Delta'\mathfrak{L}$ pour ramener ces observations à ce qu'elles eussent été avec un fil polaire orienté sur le mouvement diurne vrai ;

$\delta_2\alpha$, $\delta_2\mathfrak{L}$ les corrections ordinaires pour ramener au vide $\Delta'\alpha$, $\Delta'\mathfrak{L}$ comme si ces différences avaient été obtenues avec un fil polaire orienté sur le mouvement diurne vrai.

Les deux sortes de corrections étant très petites, on a évidemment

(27) $$\Delta\alpha = \Delta'\alpha + \delta_1\alpha + \delta_2\alpha,$$

(28) $$\Delta\mathfrak{L} = \Delta'\mathfrak{L} + \delta_1\mathfrak{L} + \delta_2\mathfrak{L}.$$

Nous n'avons pas à nous occuper ici des corrections habituelles bien connues, $\delta_2\alpha$, $\delta_2\mathfrak{L}$, et il nous suffira d'établir les formules qui donnent $\delta_1\alpha$, $\delta_1\mathfrak{L}$.

Soient, sur la sphère céleste, au moment d'une comparaison,

a *(fig. 42)* la position de l'astre, e celle de l'étoile ;

xey, abc la direction commune de leurs mouvements apparents et du fil polaire ; $pecz$ celle du fil horaire fictif mené par e perpendiculairement à xy ou parallèlement au mouvement de translation que le fil polaire peut recevoir dans le champ de la lunette.

La durée $\Delta'\alpha$ est le temps que l'astre met à parcourir l'arc ac et la différence $\Delta'\mathfrak{L}$ est mesurée par l'arc ec. La vitesse du mouvement diurne apparent de a étant v, on a donc

(29) $$\Delta'\alpha = \frac{1}{v}\,ac, \qquad \Delta'\mathfrak{L} = ec.$$

Menons par e le parallèle et le cercle horaire vrais XY et PbZ, faisant respectivement avec xy et pz le même angle i.

Si le fil polaire était dirigé, non suivant xy mais suivant XY, on trouverait, pour différence d'ascension droite, le temps mis par l'astre à parcourir l'arc ab et, pour différence de distance polaire, l'arc eb. On a donc

$$(30)\qquad \Delta'\alpha + \delta_1\alpha = \frac{1}{v}\,ab, \qquad \Delta'\mathfrak{L} + \delta_1\mathfrak{L} = eb$$

et, en retranchant les équations (29) des équations (30) correspondantes,

$$\delta_1\alpha = -\frac{1}{v}\,bc, \qquad \delta_1\mathfrak{L} = eb - ec = eb - \Delta'\mathfrak{L}.$$

Mais le triangle ebc étant très petit et considéré comme rectiligne, rectangle en c, donne

$$bc = \Delta'\mathfrak{L}\,\text{tang}\,i, \qquad eb = \Delta'\mathfrak{L}\,\text{séc}\,i;$$

d'où

$$\delta_1\alpha = -\frac{1}{v}\,\text{tang}\,i\,\Delta'\mathfrak{L}, \qquad \delta_1\mathfrak{L} = (\text{séc}\,i - 1)\,\Delta'\mathfrak{L}.$$

Si nous négligeons le carré de la réfraction, K^2, dans $\delta_1\alpha$, $\delta_1\mathfrak{L}$, nous devons réduire à $\sin\mathfrak{L}$ l'expression (19) de v, remplacer tang i par l'expression (20) de i et (séc $i - 1$) par zéro. Si, de plus, nous supposons $\Delta'\mathfrak{L}$, $\delta_1\mathfrak{L}$ exprimés en secondes d'arc et $\delta_1\alpha$ en secondes de temps, nous arrivons aux formules définitives

$$(31)\qquad \delta_1\alpha = -\frac{1}{15}\,i\,\text{coséc}\,\mathfrak{L}.\Delta'\mathfrak{L}, \qquad \delta_1\mathfrak{L} = 0.$$

La figure qui a servi à l'établissement de ces formules suppose les nombres i, $\Delta'\alpha$, $\Delta'\mathfrak{L}$ tous trois positifs. Il est facile de s'assurer qu'elles sont toujours vraies dans l'un quelconque des sept autres cas que peuvent présenter les signes de ces nombres.

Il est aisé de réduire la formule (31), pour $\Delta'\mathfrak{L} = 10'$, en une Table II, aux arguments i et $\mathfrak{L}$, applicable dans tous les observatoires. Lorsque $\Delta'\mathfrak{L}$ sera différent de $10'$, une simple proportion permettra

de conclure la valeur cherchée pour $\delta_1\alpha$ de la valeur tabulaire correspondante aux mêmes arguments.

Table II.

$\delta_1\alpha$.

La correction $\delta_1\alpha$ est prise avec le signe + ou — suivant que i et $\Delta'\mathfrak{L}$ sont ou non de signes contraires. Elle répond à $\Delta'\mathfrak{L} = 10'$ et est exprimée en secondes de temps.

$\mathfrak{L}$.	i. 0'	1'	5'	10'	15'	20'	25'	30'	35'	40'	45'	50'	55'	60'	
10°	0ˢ,00	0ˢ,07	0ˢ,33	0ˢ,67	1ˢ,01	1ˢ,34	1ˢ,68	2ˢ,01	2ˢ,35	2ˢ,68	3ˢ,01	3ˢ,35	3ˢ,69	4ˢ,01	170°
15	〃	0,04	0,23	0,45	0,68	0,90	1,13	1,35	1,58	1,80	2,03	2,25	2,48	2,70	165
20	〃	0,03	0,17	0,34	0,51	0,68	0,85	1,02	1,19	1,36	1,53	1,70	1,87	2,04	160
25	〃	0,03	0,14	0,28	0,41	0,55	0,69	0,83	0,97	1,10	1,24	1,38	1,52	1,66	155
30	〃	0,02	0,12	0,23	0,35	0,46	0,58	0,70	0,81	0,93	1,05	1,16	1,28	1,39	150
35	〃	0,02	0,10	0,20	0,30	0,40	0,51	0,61	0,71	0,81	0,91	1,01	1,11	1,21	145
40	〃	0,02	0,09	0,18	0,27	0,36	0,45	0,54	0,64	0,73	0,82	0,91	1,00	1,09	140
45	〃	0,02	0,08	0,17	0,25	0,33	0,41	0,49	0,58	0,66	0,74	0,82	0,91	0,99	135
50	〃	0,02	0,08	0,15	0,23	0,30	0,38	0,46	0,53	0,61	0,68	0,76	0,84	0,91	130
55	〃	0,01	0,07	0,14	0,21	0,28	0,36	0,43	0,50	0,57	0,64	0,71	0,78	0,85	125
60	〃	0,01	0,07	0,13	0,20	0,27	0,34	0,40	0,47	0,54	0,61	0,67	0,74	0,81	120
65	〃	0,01	0,06	0,13	0,19	0,26	0,32	0,39	0,45	0,51	0,58	0,64	0,71	0,77	115
70	〃	0,01	0,06	0,12	0,19	0,25	0,31	0,37	0,43	0,50	0,56	0,62	0,68	0,74	110
75	〃	0,01	0,06	0,12	0,18	0,24	0,30	0,36	0,42	0,48	0,54	0,60	0,66	0,72	105
80	〃	0,01	0,06	0,12	0,18	0,24	0,30	0,35	0,41	0,47	0,53	0,59	0,65	0,71	100
85	〃	0,01	0,06	0,12	0,18	0,23	0,29	0,35	0,41	0,47	0,53	0,58	0,64	0,70	95
90	〃	0,01	0,06	0,12	0,17	0,23	0,29	0,35	0,41	0,47	0,52	0,58	0,64	0,70	90

9. Si l'on remplace i par sa valeur (20), dans (31), on a

$$(32)\quad \delta_1\alpha = -\frac{K}{15}\,\text{tang}\,\varphi\,\text{coséc}^2\,\mathfrak{L}\,\cos^2\psi\,\text{séc}^2(\mathfrak{L}-\psi)\sin t\,\Delta'\mathfrak{L}.$$

Pour chaque observatoire, de colatitude connue φ, et pour $\Delta'\mathfrak{L} = 10'$, on peut transformer la formule (32) en une table à double entrée, aux arguments $\mathfrak{L}$ et t, qui, grâce à une simple réduction proportionnelle lorsque $\Delta'\mathfrak{L}$ diffère de $10'$, permettra de trouver immédiatement $\delta_1\alpha$, dans tous les cas.

La Table III suivante a été calculée pour la colatitude de l'observatoire de Besançon, $\varphi = 42^\circ\ 46'$, et peut donner une idée de la grandeur de $\delta_1\alpha$ pour les latitudes voisines de 45°.

Il est clair qu'elle tient lieu, relativement à $\delta_1\alpha$, des tables I, II réunies et qu'elle peut servir à leur vérification.

Table III.

$\delta_1\alpha$.

La correction $\delta_1\alpha$ est prise avec le signe + ou — suivant que t et $\Delta'\mathfrak{L}$ sont ou non de signes contraires. Elle répond à $\Delta'\mathfrak{L} = 10'$ et est exprimée en secondes de temps.

$\mathfrak{L}$.	t.												
	0h	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	12h
°	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s
10	″	0,07	0,14	0,20	0,27	0,32	0,36	0,38	0,37	0,33	0,24	0,13	″
20	″	0,02	0,03	0,05	0,07	0,08	0,10	0,12	0,13	0,13	0,10	0,06	″
30	″	0,01	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,07	0,09	0,10	0,10	0,06	″
40	″	0,00	0,01	0,01	0,02	0,03	0,04	0,07	0,10	0,15	0,21	0,17	″
45	″	0,00	0,01	0,01	0,02	0,03	0,04	0,07	0,13	0,26	0,52		
50	″	0,00	0,01	0,01	0,02	0,03	0,04	0,08	0,19	0,61			
55	″	0,00	0,01	0,01	0,02	0,03	0,05	0,11	0,34				
60	″	0,00	0,00	0,01	0,02	0,03	0,06	0,16					
65	″	0,00	0,00	0,01	0,02	0,03	0,07	0,30					
70	″	0,00	0,00	0,01	0,02	0,04	0,10	0,80					
75	″	0,00	0,01	0,01	0,02	0,05	0,17						
80	″	0,00	0,01	0,01	0,02	0,06	0,33						
85	″	0,00	0,01	0,01	0,03	0,10							
90	″	0,00	0,01	0,02	0,04	0,18							
95	″	0,00	0,01	0,02	0,07	0,41							
100	″	0,01	0,01	0,03	0,12								
105	″	0,01	0,02	0,06	0,25								
110	″	0,01	0,04	0,11									
115	″	0,02	0,07	0,28									
120	″	0,05	0,17										
125	″	0,14											

10. On sait que

$$(33)\quad \delta_2\alpha = \frac{K}{15}\,\text{coséc}^2\mathfrak{L}\,\sin\psi\,\text{séc}^2(\mathfrak{L}-\psi)\cos(2\mathfrak{L}-\psi)\,\text{tang}\,t.\Delta'\mathfrak{L}.$$

Si l'on désigne par s la correction totale $(\delta_1 \alpha + \delta_2 \alpha)$ que doit recevoir l'observation $\Delta' \alpha$, on aura, en ajoutant (32) et (33) membre à membre et faisant quelques simplifications évidentes

$$(34)\quad s = -\frac{2}{15}\,\mathrm{K}\ \text{coséc}\ \mathfrak{L} \sin\psi \sin(\mathfrak{L}-\psi)\ \text{séc}^2(\mathfrak{L}-\psi)\ \text{tang}\, t . \Delta' \mathfrak{L}.$$

Pour les réductions courantes d'un observatoire, il sera avantageux de construire avant tout, avec $\Delta' \mathfrak{L} = 10'$, une table des valeurs de s, aux arguments t et $\mathfrak{L}$, qui permettra de corriger $\Delta' \alpha$ d'un seul coup.

11. Cette Table des valeurs de s suffira généralement. Toutefois, les Tables I et III peuvent devenir indispensables dans certains cas exceptionnels.

1° Si de rares et courtes éclaircies du ciel ou si le lever imminent soit de la Lune, soit du Soleil ne laissent à l'observateur que le temps strictement nécessaire à quelques comparaisons, il fera bien de ne pas perdre des instants précieux à orienter exactement le fil polaire sur le mouvement diurne apparent de l'étoile. Il devra se contenter d'une orientation rapide et approchée dont il mesurera immédiatement la valeur δi en pointant l'étoile de son entrée à sa sortie du champ, notant la seconde sidérale de chaque pointé, pour procéder aux comparaisons aussitôt après.

δi, compté dans le même sens que i, se tirera de la relation évidente

$$(35)\qquad p - p_m = (t - t_m) \sin \mathfrak{L} . \delta i,$$

dans laquelle p_m et t_m désignent les moyennes arithmétiques des pointés individuels p faits sur l'étoile, avant toute comparaison, et des époques sidérales correspondantes. On aura autant d'équations (35) que de pointés et, si on les ajoute membre à membre, après avoir rendu positifs tous les coefficients de δi, il viendra

$$(36)\qquad \delta i = \pm\ \text{coséc}\ \mathfrak{L}\, \frac{\Sigma(p - p_m)}{\Sigma(t - t_m)} \ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix}\ \text{tête de vis au}\ \begin{matrix} \text{Nord} \\ \text{Sud} \end{matrix},$$

en supposant croissante la lecture de la vis micrométrique lorsque le fil mobile se rapproche de la tête de la vis.

L'angle I du fil avec le mouvement diurne apparent

$$(37)\qquad I = i + \delta i,$$

sera connu par la Table I qui fournit i et la formule (36) qui donne δi.

En prenant I et $\mathcal{L}$ pour arguments, la Table II donne la correction $\delta_1 \alpha$ des comparaisons. La correction $\delta_2 \alpha$ se tirera des Tables ordinaires de réfraction pour l'équatorial.

2° Lorsqu'on a le temps et le désir de faire un grand nombre de comparaisons sans désemparer, on oriente d'abord le fil polaire exactement sur le mouvement diurne apparent de l'étoile. On fait les comparaisons et l'on termine en mesurant δi, comme il vient d'être dit, pour reconnaître si le fil n'a pas été désorienté peu à peu dans le cours prolongé de la série, à cause soit de la variation naturelle de i, soit de l'erreur de rectification de l'axe horaire de la lunette.

Partie de zéro, si la *désorientation* δi est finalement sensible, elle a pris pour chaque comparaison ou groupe de comparaisons une valeur aisément calculable par interpolation. Avec cette valeur et celle correspondante de i fournie par la Table I, on formera $I = i + \delta i$ pour chaque comparaison ou groupe de comparaisons, dont l'erreur $\delta_1 \alpha$ se tirera de la table III avec I et $\mathcal{L}$ pour arguments. $\delta_2 \alpha$ se tirera des Tables ordinaires.

3° On procédera de la même manière, si la série, quoique relativement courte, est faite très près de l'horizon, parce qu'alors les variations de i sont rapides. On fera même bien, dans ce cas, de mesurer δi au commencement et à la fin des comparaisons pour l'interpoler plus sûrement.

12. Les Tables I, II, III, données précédemment comme spécimens, ont été calculées, sur mes formules, par M. Lebeuf, aide-astronome à l'observatoire de Besançon. A la limite même de ces Tables, comme au delà de cette limite répondant à une hauteur de 5° au-dessus de l'horizon, l'interpolation n'est plus permise et le calcul direct de la quantité qu'elles représentent s'impose nécessairement, en prenant pour K une valeur convenable, de plus en plus petite que 58″,3 à mesure que les valeurs de t, $\mathcal{L}$ employées dans le calcul correspondent à un point du ciel de plus en plus bas.

Pour éviter ce calcul direct, il faudrait construire, à partir d'une

hauteur de 5°, avec des valeurs convenablement décroissantes de K, des Tables supplémentaires dont les arguments croîtraient assez lentement pour que l'interpolation fût toujours possible.

§ III.

Dans ce dernier paragraphe, nous présentons l'application numérique des deux premiers à quelques séries d'observations, faites à l'équatorial de 8 pouces, de Besançon, sur quatre couples d'étoiles, voisines en positions et en grandeur. Ils ont été observés, les trois premiers par M. Hérique et le quatrième par M. Brück.

Voici les Tableaux de réduction de ces observations, conformément à la théorie et à la notation précédentes. Nous y désignons, en outre, par g la grandeur moyenne des étoiles du couple; par p la moyenne de leurs distances polaires; par e les écarts entre les valeurs individuelles de $\Delta\alpha$, $\Delta\mathfrak{L}$, trouvées pour différentes valeurs de t, et les moyennes $\Delta\alpha_m$, $\Delta\mathfrak{L}_m$ de ces valeurs.

Premier couple.

Observé le 3 octobre 1887, sur champ obscur, avec gros fils.

Étoiles anonymes, $g = 9{,}5$, $p = 72°15'$.

t.............	-6^h5^m	-2^h40^m	$+0^h11^m$
$\Delta'\alpha$...........	$-5^m33^s,47$	$-5^m32^s,62$	$-5^m32^s,71$
$\Delta'\mathfrak{L}$..........	$+11'16'',1$	$+11'18'',7$	$+11'18'',7$
δi............	$-23'.47''$	$0'.00''$	$-1'.23''$
i.............	-10.47	-0.39	$+\ 2$
I.............	-34.34	-0.39	-1.21
$\Delta'\alpha$..........	$-\ 5^m.33^s,47$	$-\ 5^m.32^s,62$	$-\ 5^m.32^s,71$
$\delta_1\alpha$...........	$+\ 0,41$	$+\ 0,01$	$+\ 0,01$
$\delta_2\alpha$...........	$+\ 0,15$	$0,00$	$0,00$

$\Delta\alpha$	$-\ 5^m.32^s,91$	$-\ 5^m.32^s,61$	$-\ 5^m.32^s,70$
$\Delta\alpha_m$	$-\ 5.32,74$	$-\ 5.32,74$	$-\ 5.32,74$
e	$+\ 0,17$	$-\ 0,13$	$-\ 0,04$
$\Delta'\mathfrak{L}$	$+\ 11'.16'',1$	$+\ 11'.18'',7$	$+\ 11'.18'',7$
$\delta_1\mathfrak{L}$	$0,0$	$0,0$	$0,0$
$\delta_2\mathfrak{L}$	$+\ 2,3$	$+\ 0,3$	$+\ 0,2$
$\Delta\mathfrak{L}$	$+\ 11.18,4$	$+\ 11.19,0$	$+\ 11.18,9$
$\Delta\mathfrak{L}_m$	$+\ 11.18,8$	$+\ 11.18,8$	$+\ 11.18,8$
e	$+\ 0,4$	$-\ 0,2$	$-\ 0,1$

Deuxième couple.

Observé le 4 octobre 1887, sur champ obscur, avec gros fils.

Étoiles anonymes, $g = 9,5$, $p = 70° 17'$.

t	$-\ 6^h 7^m$	$-\ 3^h 39^m$	$+\ 0^h 8^m$
$\Delta'\alpha$	$-\ 3^m 4^s,71$	$-\ 3^m 4^s,03$	$-\ 3^m 3^s,87$
$\Delta'\mathfrak{L}$	$+\ 14' 8'',7$	$+\ 14' 11'',8$	$+\ 14' 12'',2$
δi	$-\ 14'.44''$	$-\ 2'.43''$	$-\ 1'.57''$
i	$-\ 9.13$	$-\ 1.\ 4$	$+\ 1$
I	$-\ 23.57$	$-\ 3.47$	$-\ 1.56$
$\Delta'\alpha$	$-\ 3^m.\ 4^s,71$	$-\ 3^m.\ 4^s,03$	$-\ 3^m.\ 3^s,87$
$\delta_1\alpha$	$+\ 0,30$	$+\ 0,05$	$+\ 0,02$
$\delta_2\alpha$	$+\ 0,14$	$+\ 0,01$	$0,00$
$\Delta\alpha$	$-\ 3.\ 4,27$	$-\ 3.\ 3,97$	$-\ 3.\ 3,85$
$\Delta\alpha_m$	$-\ 3.\ 4,03$	$-\ 3.\ 4,03$	$-\ 3.\ 4,03$
e	$+\ 0,24$	$-\ 0,06$	$-\ 0,18$
$\Delta'\mathfrak{L}$	$+\ 14'.\ 8'',7$	$+\ 14'.11'',8$	$+\ 14'.12'',2$
$\delta_1\mathfrak{L}$	$0,0$	$0,0$	$0,0$
$\delta_2\mathfrak{L}$	$+\ 2,5$	$+\ 0,5$	$+\ 0,3$

$\Delta\mathfrak{L}$	+ 14′.11″,2	+ 14′.12″,3	+ 14′.12″,5
$\Delta\mathfrak{L}_m$	+ 14.12,0	+ 14.12,0	+ 14.12,0
e	+ 0,8	— 0,3	— 0,5

Troisième couple.

Observé le 10 janvier 1888, sur champ éclairé, avec fils d'araignée.

Étoiles 807 et 848 Weisse II, $g = 8$, $p = 69°53'$.

t	— 6ʰ36ᵐ	— 5ʰ30ᵐ	— 4ʰ7ᵐ
$\Delta'\alpha$	— 1ᵐ23ˢ,68	— 1ᵐ22ˢ,92	— 1ᵐ22ˢ,59
$\Delta'\mathfrak{L}$	+ 19′51″,9	+ 19′55″,6	+ 19′57″,1
δi	+ 1′.33″,5	+ 1′.44″,4	— 2″,9
i	— 20.27,2	— 4.11,8	— 1.27,9
I	— 18.53,7	— 2.27,4	— 1.30,8
$\Delta'\alpha$	— 1ᵐ.23ˢ,68	— 1ᵐ.22ˢ,92	— 1ᵐ.22ˢ,59
$\delta_1\alpha$	+ 0,48	+ 0,06	+ 0,04
$\delta_2\alpha$	+ 0,43	+ 0,08	+ 0,02
$\Delta\alpha$	— 1.22,77	— 1.22,78	— 1.22,53
$\Delta\alpha_m$	— 1.22,69	— 1.22,69	— 1.22,69
e	+ 0,08	+ 0,09	— 0,16
$\Delta'\mathfrak{L}$	+ 19′.51″,9	+ 19′.55″,6	+ 19′.57″,1
$\delta_1\mathfrak{L}$	0,0	0,0	0,0
$\delta_2\mathfrak{L}$	+ 8,0	+ 1,7	+ 0,7
$\Delta\mathfrak{L}$	+ 19.59,9	+ 19.57,3	+ 19.57,8
$\Delta\mathfrak{L}_m$	+ 19.58,3	+ 19.58,3	+ 19.58,3
e	— 1,6	+ 1,0	+ 0,5

Le Catalogue Weisse II donne :

$$\Delta\alpha = -1^{m}22^{s},70, \quad \Delta\mathfrak{L} = +19'58'',2.$$

Quatrième couple.

Observé le 27 décembre 1887, sur champ éclairé, avec fils d'araignée.

Étoiles 12 et 45 Paris, $g = 8$, $p = 84^{\circ}1'$.

t	$+ 5^{h}12^{m}$	$\delta_1\alpha$	$+ 0,29$
$\Delta'\alpha$	$- 1^{m}20^{s},94$	$\delta_2\alpha$	$+ 0,19$
$\Delta'\mathfrak{L}$	$- 15'37'',6$	$\Delta\alpha$	$- 1^{m}20^{s},46$
δi	$- 15'30''$	$\delta_1\mathfrak{L}$	$0,0$
i	$- 9'20''$	$\delta_2\mathfrak{L}$	$+ 2'',3$
l	$- 24'50''$	$\Delta\mathfrak{L}$	$- 15'35'',3$

Le Catalogue Paris donne :

$$\Delta\alpha = - 1^{m}20^{s},58, \qquad \Delta\mathfrak{L} = - 15'33'',9.$$

Ces Tableaux s'expliquent d'eux-mêmes et, pour terminer, nous ferons seulement quelques remarques très courtes sur chacun d'eux.

1er Couple. — La première comparaison a été faite, près de l'horizon, avec un fil grossièrement orienté. Elle est donnée comme exemple d'une observation pour laquelle on dispose, tout au plus, de quelques minutes qu'il serait imprudent de perdre dans une longue et rigoureuse orientation du fil (no **11**).

La deuxième comparaison a été faite avec un fil soigneusement orienté.

La troisième comparaison a été faite très près du méridien et avec une orientation très approchée du fil.

Les écarts individuels entre ces trois comparaisons corrigées et leur moyenne arithmétique sont à peine de l'ordre des erreurs possibles avec l'emploi de gros fils micrométriques sur champ obscur.

2e Couple. — Il n'a été observé que pour confirmer les résultats du premier.

3e Couple. — Il montre bien la précision qu'on peut atteindre,

même très près de l'horizon, dans les observations courantes, en suivant notre méthode d'orienter le fil.

4e Couple. — Il n'a été fait sur ce couple qu'une seule observation voisine de l'horizon.

Si, toutes choses égales d'ailleurs, on observait les mêmes couples près de l'horizon avec un fil orienté à coups de manette, on pourrait commettre, généralement sans pouvoir les connaître ni les corriger, des erreurs bien supérieures à $\delta_1 \alpha$, à moins que l'équatorial employé ne fût très bien rectifié ou très stable, conditions difficiles à remplir et à surveiller en temps opportun.

EXERCICES SUR LES PROBLÈMES ÉLÉMENTAIRES RELATIFS AU MOUVEMENT DIURNE D'UNE ÉTOILE.

Le triangle PZE ayant pour sommets le pôle nord de la sphère céleste, le zénith et la position de l'étoile, a pour côtés

$$PZ = \varphi, \quad PE = \mathfrak{L}, \quad ZE = z,$$

et pour angles

$$\widehat{Z} = 180^\circ - a, \quad \widehat{E} = q, \quad \widehat{P} = t.$$

Si l'on donne trois de ces six éléments, le calcul des trois autres correspond à un cas connu de résolution des triangles sphériques. Nous désignerons un tel calcul sous le nom de *problème élémentaire* du mouvement diurne.

Au point de vue purement algébrique, tous ces problèmes se réduisent à six cas distincts. Mais au point de vue astronomique, les éléments φ, $\mathfrak{L}$, z, a, q, t sont distincts parce qu'ils ne se mesurent pas de la même manière et le nombre des problèmes élémentaires est celui des combinaisons de six objets pris trois à trois ou de vingt.

Il serait superflu de présenter ici les solutions de ces vingt problèmes qui n'offrent aucune difficulté. Nous en présenterons seulement quelques-unes sous une forme plus ou moins déguisée.

50e Exercice.

Quelles sont les coordonnées géographiques ($\mathcal{L}'$, φ') du lieu de rencontre de la Terre avec la direction allant de son centre à une étoile donnée E ($\mathcal{A}$, $\mathfrak{L}$), *à l'époque sidérale* θ, *d'un lieu connu* ($\mathcal{L}$, φ)?

Solution : Au lieu connu ($\mathcal{L}$, φ), l'angle horaire de l'étoile considérée est égal à $\theta - \mathcal{A}$. La longitude du point cherché sera donc égale à

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \theta - \mathcal{A}.$$

La latitude φ' est donnée par la relation

$$\varphi' = \frac{\pi}{2} - \mathcal{D},$$

en supposant la terre sphérique.

51e Exercice.

Pour un lieu L ($\mathcal{L}$, φ) *de la Terre, calculer l'heure sidérale* θ, *l'angle horaire* t, *l'azimut* a, *la distance zénithale* z *d'une étoile connue* E ($\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$), *à l'instant où elle traverse le méridien d'un autre lieu* L' ($\mathcal{L}'$, φ').

Solution : La solution est évidemment donnée par les formules

$$\begin{aligned} t &= \mathcal{L}' - \mathcal{L}, \\ \theta &= \mathcal{A} + t, \\ \cos z &= \cos \mathcal{D} \cos \varphi + \sin \mathcal{D} \sin \varphi \cos t, \\ \sin a &= \sin \mathcal{D} \operatorname{coséc} z \sin t. \end{aligned}$$

52e Exercice.

Trouver la latitude φ *d'un lieu, connaissant la hauteur méridienne* h *et l'azimut* a, *à son lever ou à son coucher, d'une étoile observée en ce lieu.*

Solution : Soient *(fig. 43)* : m le point de culmination de l'étoile; C le point où elle se couche; O le point ouest; Z le zénith; P le pôle. On a évidemment

$$\begin{aligned} PC &= Pm = PZ + Zm = 90^\circ - \varphi + 90^\circ - h = 180^\circ - (\varphi + h), \\ OC &= 90^\circ - CS = 90^\circ - a, \\ PO &= 90^\circ. \end{aligned}$$

Le triangle POC donne donc

$$\cos PC = \sin OC . \sin O,$$

c'est-à-dire

$$-\cos(\varphi + h) = \cos a \sin \varphi,$$

d'où

$$\operatorname{tg} \varphi = + \frac{\cos h}{\sin h - \cos a}.$$

53e Exercice.

En un lieu de latitude donnée φ, on a mesuré, à l'époque sidérale θ, l'azimut a d'une étoile E dont l'ascension droite $\mathcal{A}$ est connue; calculer la déclinaison $\mathfrak{D}$ et la distance zénithale z de l'étoile.

Solution : L'angle horaire t de l'étoile se calcule d'abord par la formule

$$t = \theta - \mathcal{A}.$$

On connaît alors, dans le triangle PZE, le côté PZ et les deux angles adjacents; on peut donc calculer les deux autres côtés.

54e Exercice.

Sous quel angle i, à quelle hauteur h, à quelle époque sidérale θ, une étoile connue E ($\mathcal{A}$, $\mathfrak{L}$) traverse-t-elle le vertical ZV d'azimut donné a, en un lieu de colatitude connue φ?

Solution : Si l'on désigne par q, t, z l'angle parallactique, l'angle horaire, la distance zénithale de l'étoile E au moment où elle traverse le vertical ZV, on a évidemment

$$i = 90^\circ - q, \quad h = 90^\circ - z, \quad \theta = \mathcal{A} + t,$$

et le triangle sphérique PZE *(fig. 44)*, formé par le pôle P, le zénith Z, la position E de l'étoile, dans lequel PZ, PE, $\widehat{Z}$ sont connus, donne immédiatement q, t, z par les formules suivantes (n° 12 du COURS) :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sin q = \sin \varphi \sin a \operatorname{coséc} \mathfrak{L}, \\ &\cot \frac{t}{2} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\varphi + \mathfrak{L})}{\cos \frac{1}{2}(\varphi - \mathfrak{L})} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(a - q), \\ &\operatorname{tg} \frac{z}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a - q)}{\sin \frac{1}{2}(a + q)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi + \mathfrak{L}). \end{aligned} \right.$$

Nous ne nous arrêterons pas à la discussion de ces formules qui se trouve détaillée dans tous les traités de trigonométrie, à la suite de la résolution d'un triangle sphérique dans lequel on connaît deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux. Nous nous contenterons de la résumer en disant qu'on aura deux, une ou zéro solutions suivant que d, défini par

$$\sin d = \sin a \sin \varphi,$$

et représentant la plus courte distance sphérique de P à ZV, sera inférieur, égal ou supérieur à $\mathfrak{L}$.

55e Exercice.

L'axe optique d'une lunette de théodolite, en un lieu de colatitude φ, est dirigé sur le point A de la sphère céleste dont les coordonnées horizontales connues sont a et z. Le vertical ZA fait l'angle donné i avec le plan m déterminé par cet axe et l'un des deux fils rectangulaires du réticule. Calculer les coordonnées horizontales α, ζ et méridiennes t, p du pôle Q de ce plan m.

Solution : L'axe optique passant par la croisée des fils du réticule, le plan m coupe la sphère céleste, ayant pour centre le centre optique de l'objectif, suivant un grand cercle qq' passant par A et incliné de i sur AZ. Un petit arc seulement de ce grand cercle est visible dans le champ de la lunette, de part et d'autre de A. Le pôle Q de ce cercle est dit pôle de m.

L'angle i *(fig. 45)* ne dépend que de l'orientation du réticule et reste invariable lorsque la lunette tourne autour de l'un quelconque des axes du théodolite supposés bien nivelés.

Le complément de i est l'inclinaison du fil considéré sur une horizontale du plan réticulaire supposé perpendiculaire à l'axe optique.

Le triangle sphérique ZQA dans lequel on connaît :

$$\text{ZA} = z, \quad \text{AQ} = 90^\circ, \quad \widehat{\text{QAZ}} = 90^\circ - i,$$

donne

$$\text{ZQ} = \zeta, \quad \widehat{\text{AZQ}} = \alpha - a, \quad \widehat{\text{ZQA}} = v,$$

par les formules

$$(1) \qquad \begin{cases} \cos\zeta = \sin z \sin i, \\ \cos(\alpha - a) = -\cot z \cot \zeta, \\ \text{séc}\, v = \sin\zeta \,\text{séc}\, z, \end{cases}$$

α et ζ étant calculés, le triangle PQZ, dans lequel on connaît

$$ZQ = \zeta, \quad ZP = \varphi, \quad PZQ = 180° - \alpha,$$

donne ensuite

$$PQ = p, \quad \widehat{ZPQ} = t, \quad \widehat{ZQP} = u,$$

par les formules

$$(2) \qquad \begin{cases} \cos p = \cos\varphi \cos\zeta - \sin\varphi \sin\zeta \cos\alpha, \\ \sin t = \sin\alpha . \sin\zeta . \text{cosec}\, p, \\ \sin u = \sin\varphi . \sin t . \text{cosec}\, \zeta. \end{cases}$$

REMARQUE.

Si l'on prolonge le grand cercle PQ jusqu'à sa rencontre B avec qq' la position de B relative à A sera donnée par la grandeur de l'arc AB ou par $180° - u - v$.

56e Exercice.

Déterminer, en un lieu, la hauteur du pôle et la méridienne en mesurant au théodolite une série d'azimuts et de hauteurs d'une étoile.

Solution : La solution a été développée dans le n° 172 du Cours, auquel nous renvoyons le lecteur.

57e Exercice.

En un certain lieu, on a mesuré une série de distances zénithales z', z'', z''', ... d'une certaine étoile, aux époques T', T'', T''', ...

marquées par un chronomètre sidéral dont la marche constante est connue et égale à M.

On demande la colatitude φ *du lieu, la distance polaire* $\mathfrak{L}$ *de l'étoile, la série des angles horaires* t', t'', t''', ... *et la série des azimuts* a', a'', a''', ... *correspondants aux mêmes époques.*

Solution : 1° Soient, à une époque ronde instrumentale T connue et choisie vers le milieu de la série, r la correction du chronomètre et t l'angle horaire correspondant. Nous aurons, en désignant par $\mathcal{A}$ l'ascension droite de l'étoile :

$$(1) \quad \begin{cases} t = \mathrm{T} + r - \mathcal{A}, \\ t' = t + (\mathrm{M}+1)(\mathrm{T}' - \mathrm{T}) = t + \alpha', \\ t'' = t + (\mathrm{M}+1)(\mathrm{T}'' - \mathrm{T}) = t + \alpha'', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

en posant :

$$(2) \quad \alpha' = (\mathrm{M}+1)(\mathrm{T}' - \mathrm{T}), \qquad \alpha'' = (\mathrm{M}+1)(\mathrm{T}'' - \mathrm{T}), \quad \dots.$$

D'ailleurs, les relations usuelles

$$(3) \quad \begin{cases} \cos z' = \cos \mathfrak{L} \cos \varphi + \sin \mathfrak{L} \sin \varphi \cos t', \\ \cos z'' = \cos \mathfrak{L} \cos \varphi + \sin \mathfrak{L} \sin \varphi \cos t'', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

en nombre égal à celui des mesures, si l'on y remplace t', t'', ... par leurs valeurs (1) et si l'on pose

$$\mathrm{X} = \cos \mathfrak{L} \cos \varphi, \qquad \mathrm{Y} = \sin \mathfrak{L} \sin \varphi \cos t, \qquad \mathrm{Z} = \sin \mathfrak{L} \sin \varphi \sin t,$$

prennent la forme

$$(4) \quad \begin{cases} \cos z' = \mathrm{X} + \mathrm{Y} \cos \alpha' - \mathrm{Z} \sin \alpha', \\ \cos z'' = \mathrm{X} + \mathrm{Y} \cos \alpha'' - \mathrm{Z} \sin \alpha'', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

On résoudra le système (4) par la méthode de Cauchy ou des moindres carrés, pour calculer ensuite t, $\mathfrak{L}$, φ par les formules

$$(5) \quad \operatorname{tg} t = \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Y}},$$

$$(6) \quad \cos(\mathfrak{L} + \varphi) = \mathrm{X} - \mathrm{Y} \operatorname{s\acute{e}c} t = \mathrm{X} - \mathrm{Z} \operatorname{cos\acute{e}c} t,$$

$$(7) \quad \cos(\mathfrak{L} - \varphi) = \mathrm{X} + \mathrm{Y} \operatorname{s\acute{e}c} t = \mathrm{X} + \mathrm{Z} \operatorname{cos\acute{e}c} t.$$

L'équation (5) admet, entre 0 et 2π, deux solutions :

$$t_1 \quad \text{et} \quad t_2 = (\pi + t_1),$$

t_1 étant plus petit que π. Le problème admet seulement la solution t_1 ou t_2 suivant qu'à l'époque T l'astre est à l'ouest ou à l'est de l'observateur, c'est-à-dire suivant que sa distance zénithale augmente ou diminue.

La valeur de t étant choisie, les formules (6) et (7) donneront, entre 0 et π, les valeurs $2m$, $2n$ de $(\mathfrak{L} + \varphi)$, $(\mathfrak{L} - \varphi)$. Par suite, $\mathfrak{L}$ et φ étant compris entre 0 et π, on aura

$$\mathfrak{L} + \varphi = 2m \quad \text{ou} \quad 2\pi - 2m, \qquad \mathfrak{L} - \varphi = \pm 2n,$$

m étant toujours plus grand que n. On tire de là quatre solutions pour les équations (6), (7), savoir :

$$\underbrace{\begin{matrix}\mathfrak{L} = m + n < \pi, \\ \varphi = m - n < \frac{\pi}{2},\end{matrix}}_{s_1} \quad \underbrace{\begin{matrix}m - n < \frac{\pi}{2}, \\ m + n < \pi,\end{matrix}}_{s_2} \quad \underbrace{\begin{matrix}\pi - m + n > \frac{\pi}{2}, \\ \pi - m - n > 0,\end{matrix}}_{s_3} \quad \underbrace{\begin{matrix}\pi - m - n > 0, \\ \pi - m + n > \frac{\pi}{2}.\end{matrix}}_{s_4}$$

On choisira celle qui convient au problème d'après certaines remarques que l'observateur ne manque jamais de faire ou certaines notions qu'il a toujours sur les grandeurs de $\mathfrak{L}$ et φ.

La solution	s_1	correspond à	$\varphi < \frac{\pi}{2}$,	$\mathfrak{L} > \varphi$,
—	s_2	—	$\varphi < \frac{\pi}{2}$,	$\mathfrak{L} < \varphi$,
—	s_3	—	$\varphi > \frac{\pi}{2}$,	$\mathfrak{L} > \varphi$,
—	s_4	—	$\varphi > \frac{\pi}{2}$,	$\mathfrak{L} < \varphi$.

Pour choisir la solution convenable, il suffit donc de savoir dans quel hémisphère se trouve l'observateur et si l'étoile franchit son méridien du côté nord ou du côté sud.

2° t, $\mathfrak{L}$, φ étant connus, les équations (1) donneront la série t', t'', ... des angles horaires, puis les formules

$$(8)\quad \sin \mathfrak{L} = \sin a' \sin z' \operatorname{coséc} t' = \sin a'' \sin z'' \operatorname{coséc} t'' = \ldots$$

donneront la série a', a'', ... des azimuts.

REMARQUE.

Après le calcul de t, on connaît $(r - \mathcal{A})$ qui est égal à $(t - \mathrm{T})$. Si donc, aux données de l'énoncé, on ajoute celle de r, on en conclura $\mathcal{A}$ et réciproquement.

58° Exercice.

En un certain lieu, on a mesuré avec le théodolite une série d'azimuts a', a'', a''', ... d'une certaine étoile, aux époques T', T'', T''', ... *d'un chronomètre sidéral dont la marche constante est connue et égale à* M.

On demande la colatitude φ du lieu, la distance polaire $\mathfrak{L}$ de l'étoile, la série des angles horaires t', t'', t''', ... et la série des distances zénithales z', z'', z''', ... correspondant aux mêmes époques.

Solution : Nous avons les relations bien connues

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \cot \mathfrak{L} \cos \varphi = \sin \varphi \cos t' - \sin t' \cot a', \\ \cot \mathfrak{L} \cos \varphi = \sin \varphi \cos t'' - \sin t'' \cot a'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

en nombre égal à celui des mesures. Si donc nous introduisons les quantités T, t, r et α', α'', ... définies comme dans l'exercice précédent, si de plus nous posons

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{X} = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \mathfrak{L} \cos t, \quad \mathrm{Y} = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \mathfrak{L} \sin t, \quad \mathrm{Z} = \operatorname{séc} \varphi \operatorname{tg} \mathfrak{L} \sin t, \\ \qquad\qquad \mathrm{U} = \operatorname{séc} \varphi \operatorname{tg} \mathfrak{L} \cos t, \end{array}\right.$$

le système (1) devient

$$(3)\quad \begin{cases} 1 = X\cos\alpha' - Y\sin\alpha' - Z\cot a'\cos\alpha' - U\cot a'\sin\alpha', \\ 1 = X\cos\alpha'' - Y\sin\alpha'' - Z\cot a''\cos\alpha'' - U\cot a''\sin\alpha'', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Le système (3) étant résolu par rapport à X, Y, Z, U par la méthode de Cauchy ou celle des moindres carrés, on aura t, φ, $\mathfrak{L}$ par les formules

$$\operatorname{tg} t = \frac{Y}{X} = \frac{Z}{U},$$

$$\sin\varphi = \frac{Y}{Z} = \frac{X}{U},$$

$$\operatorname{tg}\mathfrak{L} = \frac{X}{\operatorname{tg}\varphi\cos t} = \frac{Y}{\operatorname{tg}\varphi\sin t} = \frac{Z}{\operatorname{séc}\varphi\sin t} = \frac{U}{\operatorname{séc}\varphi\cos t}.$$

Ce calcul exige que l'on ait mesuré au moins quatre azimuts, quoique les inconnues se réduisent à trois distinctes. Si l'on se bornait à la mesure de trois azimuts seulement, les équations (3) seraient du deuxième degré par rapport aux quantités X, Y, Z, U.

Connaissant t, φ, $\mathfrak{L}$, les équations (1) et (8) de l'exercice précédent donneront successivement les séries t', t'', ... et z', z'', ...

La remarque finale de cet exercice s'applique encore ici. Mais voici une autre remarque qui ne sera pas inutile.

Les valeurs de z', z'', z''', ... ainsi calculées d'une manière indépendante de la réfraction, puisque ce phénomène n'affecte pas les mesures a', a'', a''', ... peuvent être comparées aux distances zénithales ζ', ζ'', ζ''', ... si l'observateur a eu le soin de mesurer ces distances en même temps que les azimuts. Les différences $(z' - \zeta')$, $(z'' - \zeta'')$, $(z''' - \zeta''')$, ... seront les réfractions observées. Ce procédé peut conduire à la construction empirique d'une table de réfraction.

CHAPITRE II

Mouvement diurne de deux étoiles

59e Exercice.

Calculer la distance angulaire 2δ *de deux étoiles* E $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$), E' ($\mathcal{A}'$, $\mathcal{D}'$) *données par leurs coordonnées équatoriales.*

Solution : On a évidemment :

$$\cos 2\delta = \cos \mathcal{D} \cos \mathcal{D}' + \sin \mathcal{D} \sin \mathcal{D}' \cos (\mathcal{A} - \mathcal{A}'),$$

ou bien, par des transformations faciles qu'il est inutile de développer,

$$\begin{aligned} \cos 2\delta &= \cos 2P \sin^2 d + \cos 2Q \cos^2 d, \\ \sin^2 \delta &= \sin^2 P \sin^2 d + \sin^2 Q \cos^2 d, \\ \cos^2 \delta &= \cos^2 P \sin^2 d + \cos^2 Q \cos^2 d, \end{aligned}$$

en posant

$$\mathcal{D}' + \mathcal{D} = 2P, \quad \mathcal{D}' - \mathcal{D} = 2Q, \quad \mathcal{A}' - \mathcal{A} = 2d.$$

REMARQUE.

Ces formules donnent aussi la distance angulaire de deux points de la terre, supposée sphérique, qui auraient respectivement $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ pour longitudes et $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ pour latitudes.

60e Exercice.

Connaissant les hauteurs affectées de la réfraction h, h' *et les azimuts* a, a' *de deux étoiles* E, E', *calculer leur distance angulaire apparente* Δ'. *Corriger* Δ' *de l'effet de la réfraction.*

Solution : On a évidemment :

$$(1) \qquad \cos \Delta' = \sin h \sin h' + \cos h \cos h' \cos (a' - a),$$

pour déterminer Δ'. Si on veut corriger Δ' de la réfraction, connaissant les erreurs δh, $\delta h'$ dues à cette cause, qui affectent h, h', il suffit de différentier l'équation (1) en y considérant $(a' - a)$ comme invariable. On obtient ainsi, en désignant par B, C les angles en E, E' du triangle ZEE' *(fig. 46)*,

$$(2) \qquad \delta\Delta' = \delta h.\cos C + \delta h' \cos B.$$

On obtiendrait immédiatement ce résultat par la première formule différentielle du tableau B (n° 16 du COURS), en y posant :

$$\delta A = 0, \quad \delta a = \delta\Delta', \quad \delta b = \delta h, \quad \delta c = \delta h'.$$

Géométriquement, le résultat s'obtient à vue.

61e Exercice.

Calculer les coordonnées équatoriales α, ϖ *du milieu* M *de la distance angulaire* 2δ *de deux étoiles connues* E ($\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$), E' ($\mathcal{A}'$, $\mathcal{D}'$).

Solution : Les triangles EPM, E'PM *(fig. 47)* donnent respectivement :

$$\sin \mathcal{D} \sin (\alpha - \mathcal{A}) = \sin M . \sin \delta,$$
$$- \sin \mathcal{D}' \sin (\alpha - \mathcal{A}') = \sin M . \sin \delta,$$

et

$$\cos \mathcal{D} = \cos \varpi \cos \delta + \sin \varpi \sin \delta \cos M,$$
$$\cos \mathcal{D}' = \cos \varpi \cos \delta - \sin \varpi \sin \delta \cos M,$$

en désignant par M l'angle PME. L'une des formules de l'exercice 59 ayant donné δ, on tirera α, ϖ des deux équations

$$\sin \mathcal{D} \sin (\alpha - \mathcal{A}) + \sin \mathcal{D}' \sin (\alpha - \mathcal{A}') = 0,$$
$$2 \cos \varpi \cos \delta = \cos \mathcal{D} + \cos \mathcal{D}'.$$

La première donne la formule

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \mathcal{D} \sin \mathcal{A} + \sin \mathcal{D}' \sin \mathcal{A}'}{\sin \mathcal{D} \cos \mathcal{A} + \sin \mathcal{D}' \cos \mathcal{A}'},$$

ou, en posant

$$\mathfrak{L}' + \mathfrak{L} = 2P, \qquad \mathcal{A}' + \mathcal{A} = 2s,$$
$$\mathfrak{L}' - \mathfrak{L} = 2Q, \qquad \mathcal{A}' - \mathcal{A} = 2d,$$
$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} d \operatorname{tg} Q \cot P,$$

la formule

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} s + \operatorname{tg} \psi}{1 - \operatorname{tg} s . \operatorname{tg} \psi} = \operatorname{tg} (s + \psi),$$

c'est-à-dire

$$(1) \qquad \alpha = s + \psi,$$

et la deuxième équation donne immédiatement

$$(2) \qquad \cos \varpi = \cos P \cos Q \text{ séc } \delta.$$

REMARQUE.

ψ est l'angle du grand cercle médian et du grand cercle bissecteur correspondants à l'angle P du triangle EPE'.

62e Exercice.

Calculer les coordonnées équatoriales (a, p) *et* (a', p') *du pôle* A *du grand cercle* C *passant par deux étoiles données* E $(\mathcal{A}, \mathfrak{L})$, E' $(\mathcal{A}', \mathfrak{L}')$ *et du pôle* A' *du grand cercle de symétrie* C' *de ces étoiles.*

Solution : Considérons les trois triangles sphériques PAE, PAE', PAA' *(fig. 48)* et désignons par u, u' les angles en A des deux premiers. L'angle en A du troisième sera évidemment $\frac{1}{2}(\pi + u + u')$ et ces triangles nous donneront respectivement les trois couples de relations suivants, (1, 4), (2, 5), (3, 6) :

$$(1) \qquad \cos p \cos \mathfrak{L} + \sin p \sin \mathfrak{L} \cos (\mathcal{A} - a) = 0,$$
$$(2) \qquad \cos p \cos \mathfrak{L}' + \sin p \sin \mathfrak{L}' \cos (\mathcal{A}' - a) = 0,$$
$$(3) \qquad \cos p \cos p' + \sin p \sin p' \cos (a' - a) = 0,$$
$$(4) \qquad \sin p \cos u = \cos \mathfrak{L},$$
$$(5) \qquad \sin p \cos u' = \cos \mathfrak{L}',$$
$$(6) \qquad \sin p \sin \tfrac{1}{2}(u + u') = - \cos p'.$$

Les deux relations de chaque couple s'obtiennent immédiatement en appliquant les formules fondamentales de la trigonométrie sphérique au calcul des cosinus de (AE, PE), (AE′, PE′), (AA′, PA′).

1° Les équations (1), (2) peuvent s'écrire :

$$\operatorname{tg} p \cos a . \cos \mathcal{A} + \operatorname{tg} p \sin a . \sin \mathcal{A} + \cot \mathfrak{L} = 0,$$
$$\operatorname{tg} p \cos a . \cos \mathcal{A}' + \operatorname{tg} p \sin a . \sin \mathcal{A}' + \cot \mathfrak{L}' = 0,$$

ou, en résolvant par rapport à $\operatorname{tg} p \cos a$, $\operatorname{tg} p \sin a$ et introduisant les quantités s, d, P, Q précédemment définies (EXERCICE 61),

$$\begin{aligned} \sin \mathfrak{L} \sin \mathfrak{L}' \operatorname{tg} p \cos a \sin 2d &= \sin(s-d) \cos \mathfrak{L}' \sin \mathfrak{L} - \sin(s+d) \cos \mathfrak{L} \sin \mathfrak{L}' \\ &= -\sin s \cos d \sin 2\mathrm{Q} - \cos s \sin d . \sin 2\mathrm{P}, \\ -\sin \mathfrak{L} \sin \mathfrak{L}' \operatorname{tg} p \sin a \sin 2d &= \cos(s-d) \cos \mathfrak{L}' \sin \mathfrak{L} - \cos(s+d) \cos \mathfrak{L} \sin \mathfrak{L}' \\ &= -\cos s \cos d \sin 2\mathrm{Q} + \sin s \sin d \sin 2\mathrm{P}, \end{aligned}$$

et conduisent aux formules

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} 2 \sin \mathfrak{L} \sin \mathfrak{L}' \operatorname{tg} p \cos(a-s) &= -\operatorname{séc} d . \sin 2\mathrm{P}, \\ 2 \sin \mathfrak{L} \sin \mathfrak{L}' \operatorname{tg} p \sin(a-s) &= \operatorname{coséc} d . \sin 2\mathrm{Q}, \end{aligned} \right.$$

qui donnent, commodément pour le calcul numérique, $(a-s)$ et p par leur tangente.

REMARQUE.

La somme des carrés de ces formules fournit la relation

$$(8) \quad (2 \sin \mathfrak{L} \sin \mathfrak{L}' \operatorname{tg} p)^2 = \sin^2 2\mathrm{P} \operatorname{séc}^2 d + \sin^2 2\mathrm{Q} \operatorname{coséc}^2 d,$$

qui nous sera utile dans l'exercice suivant.

2° Après avoir calculé a, p par les formules (7), on calculera successivement u, u', p', a' par les formules (4), (5), (6), (3) qui sont très pratiques.

REMARQUE.

Si on retranche les équations (4), (5), membres à membres, en se rappelant que

$$u' - u = \mathrm{EE}' = 2\delta$$

est donné par les formules de l'exercice 59, on obtient la formule

$$\sin p \sin \tfrac{1}{2}(u + u') \sin \delta = \sin P \sin Q,$$

ou, d'après (6),

$$-\cos p' \sin \delta = \sin P \sin Q,$$

qui conduit à l'égalité

$$\operatorname{tg}^2 p' = \frac{\sin^2\delta - \sin^2 P \sin^2 Q}{\sin^2 P \sin^2 Q} = \frac{\sin^2 P \sin^2 d + \sin^2 Q \cos^2 d - \sin^2 P \sin^2 Q}{\sin^2 P . \sin^2 Q},$$

immédiatememt réductible à la forme plus simple

$$\operatorname{tg}^2 p' = \cot^2 P \cos^2 d + \cot^2 Q \sin^2 d.$$

Cette expression de $\operatorname{tg}^2 p'$ nous sera utile dans un exercice prochain.

63e Exercice.

A quelle heure sidérale θ, *deux étoiles donneés* E $(\mathcal{A}, \mathfrak{L})$, E' $(\mathcal{A}', \mathfrak{L}')$ *ont-elles même azimut, à* 180° *près, dans un lieu de colatitude* φ, *et quel est cet azimut?*

Solution : 1° Soient *(fig. 49) :* t, t' les angles horaires des étoiles à l'époque θ ; a leur azimut commun à 180° près.

Posons :

$$t' + t = 2\tau, \qquad t' - t = \mathcal{A} - \mathcal{A}' = 2d,$$
$$\mathfrak{L}' + \mathfrak{L} = 2P, \qquad \mathfrak{L}' - \mathfrak{L} = 2Q.$$

Nous avons, pour déterminer les inconnues a et τ, les deux relations

$$(1) \qquad \begin{cases} \cot \mathfrak{L} \sin \varphi = \cos \varphi \cos t - \sin t \cot a, \\ \cot \mathfrak{L}' \sin \varphi = \cos \varphi \cos t' - \sin t' \cot a. \end{cases}$$

Par élimination de $\cot a$ et introduction de τ, d, P, Q, ces relations donnent immédiatement

$$\sin \tau \cos d \sin 2Q + \cos \tau \sin d \sin 2P = \cot \varphi \sin 2d \sin \mathfrak{L} \sin \mathfrak{L}',$$

et, par suite,

$$\sin(\tau + \psi) = 2 \cos \psi \cot \varphi . \sin \mathfrak{L} \sin \mathfrak{L}' \sin d \operatorname{coséc} 2Q,$$

l'angle auxiliaire ψ étant calculé par la formule

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} d \sin 2\mathrm{P} \operatorname{cos\acute{e}c} 2\mathrm{Q}.$$

Ayant calculé τ par l'équation (2), on aura $t' = \tau + d$, $t = \tau - d$, et ensuite a par l'une ou l'autre des équations (1). Enfin θ par la formule :

$$\theta = t + \mathcal{A} = t' + \mathcal{A}'.$$

Si l'on désigne par m le second membre de la relation (2), le problème ne sera possible que si m^2 est inférieur ou égal à l'unité. Dans le premier cas il y a deux solutions, qui se réduisent à une seule dans le deuxième.

La condition $m^2 \leq 1$, après substitution à $\cos \psi$ de sa valeur en fonction de $\operatorname{tg} \psi$, c'est-à-dire de d, P, Q, peut s'écrire

$$(2 \cot \varphi \sin \mathcal{D} \sin \mathcal{D}')^2 < \sin^2 2\mathrm{P} \operatorname{s\acute{e}c}^2 d + \sin^2 2\mathrm{Q} \operatorname{cos\acute{e}c}^2 d,$$

ou

$$\operatorname{cotg}^2 \varphi < \operatorname{tg}^2 p,$$

en vertu d'une relation connue, p désignant la distance polaire du pôle du grand cercle passant par les deux étoiles.

64e Exercice.

A quelle heure sidérale θ, *deux étoiles connues* E ($\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$), E′ ($\mathcal{A}'$, $\mathcal{D}'$) *sont-elles à la même distance* z *du zénith d'un lieu de colatitude* φ *et quelle est cette distance?*

Solution : Soient t, t' les angles horaires des étoiles E, E′ à l'époque θ. On a :

(1) $\cos z = \cos\varphi \cos\mathcal{D} + \sin\varphi \sin\mathcal{D} \cos t = \cos\varphi \cos\mathcal{D}' + \sin\varphi \sin\mathcal{D}' \cos t'$,

(2) $t' = t + \mathcal{A} - \mathcal{A}'$,

(3) $\theta = t + \mathcal{A} = t' + \mathcal{A}'$,

quatre équations qui déterminent θ, t, t' et z.

Les équations (1) et (3) donneront pratiquement θ et z dès que t

et t' seront calculés. Pour rendre ce calcul symétrique, posons :

$$\mathfrak{L}' + \mathfrak{L} = 2P, \quad t' + t = 2\tau$$
$$\mathfrak{L}' - \mathfrak{L} = 2Q, \quad t' - t = 2d = \mathcal{A} - \mathcal{A}',$$

et mettons l'égalité des deux valeurs de cos z sous la forme

$$2 \cot\varphi . \sin P \sin Q = \sin (P + Q) \cos (\tau + d) - \sin (P - Q) \cos(\tau - d),$$

ou

$$\cot \varphi \sin P \sin Q = \cos \tau \cos d \cos P \sin Q - \sin \tau \sin d \sin P \cos Q,$$
$$\cot \varphi = \cos \tau \cos d . \cot P - \sin \tau \sin d \cot Q.$$

Posons :

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} d \operatorname{tg} P \cot Q,$$

et nous aurons, pour calculer τ, l'équation :

$$(4) \qquad \cos (\tau + \psi) = \cos \psi \cot \varphi . \operatorname{tg} P \operatorname{séc} d.$$

Le problème aura deux solutions, si la condition

$$\cos^2 \psi \cot^2 \varphi \operatorname{tg}^2 P \operatorname{séc}^2 d < 1,$$

ou, en prenant pour $\cos^2 \psi$ sa valeur en fonction de $\operatorname{tg}^2 \psi$, c'est-à-dire de $(\operatorname{tg} d . \operatorname{tg} P \cot Q)^2$, si la condition,

$$(5) \qquad \cot^2 \varphi < \cos^2 d \cot^2 P + \sin^2 d \cot^2 Q,$$

est remplie. Ces deux solutions se réduiraient à une seule si $\cot^2 \varphi$ était égal au second membre de l'inégalité (5).

τ étant calculé, t, t', 0 et z s'obtiennent immédiatement par les formules précédentes.

65e Exercice.

Établir, a priori, les conditions de possibilité des deux exercices précédents.

Solution : 1° Pour que deux étoiles puissent avoir même azimut, à 180° près, à un moment commun, il faut et il suffit que le grand cercle C, déterminé par elles sur la sphère céleste, puisse devenir

vertical ou passer par le zénith Z de l'observateur, dans le courant de sa rotation diurne autour de l'axe du monde PP'. En d'autres termes, il faut et il suffit que les pôles A_1, A_2 de C puissent traverser l'horizon ou se lever et se coucher.

Soient p_1, p_2 les distances polaires de A_1, A_2 et supposons A_1 plus voisin que A_2 du pôle P de la sphère céleste, visible pour l'observateur. Nous avons

$$p_1 < p_2 = 180^\circ - p_1.$$

La condition du lever et du coucher de A_1 est exprimée par

$$90^\circ - \varphi < p_1,$$

où φ désigne la colatitude, ce qui entraîne l'inégalité

$$p_2 < 90^\circ + \varphi,$$

c'est-à-dire la condition du lever et du coucher de A_2. Si p désigne la distance polaire d'un pôle quelconque de C, la condition double de son lever et coucher peut s'écrire

$$90^\circ - \varphi \leq p \leq 90^\circ + \varphi,$$

ou encore

$$(1) \qquad \cot^2 \varphi \leq \operatorname{tg}^2 p.$$

Si nous remplaçons, dans (1), $\operatorname{tg}^2 p$ par sa valeur trouvée dans l'exercice 62, nous aurons la condition déjà établie dans l'exercice 63.

Ainsi l'exercice 63 a 0, 1, 2 solutions, suivant que le point A_1, assimilé à une étoile, est circompolaire, touche l'horizon, se lève et se couche pendant sa rotation diurne.

2° Pour que deux étoiles puissent avoir même distance zénithale, à un certain moment, il faut et il suffit évidemment que les pôles A'_1, A'_2 du grand cercle C' de la sphère céleste, mené à égale distance de ces étoiles et perpendiculairement à C, puissent se lever et se coucher; en d'autres termes, que le cercle de symétrie C' de ces étoiles puisse devenir vertical ou passer par le zénith de l'observateur.

Si p' désigne la distance polaire d'un pôle quelconque de C', l'inégalité

$$(2) \qquad \cot^2 \varphi \leq \operatorname{tg}^2 p',$$

exprime la condition nécessaire et suffisante de l'exercice 64, après substitution à $\text{tg}^2\, p'$ de son expression donnée dans l'exercice 62.

Ainsi, l'exercice 64 a 0, 1, 2 solutions, suivant que le point A'_1, assimilé à une étoile, est circompolaire, touche l'horizon, se lève et se couche pendant sa rotation diurne.

Corollaire.

Si les inégalités (1) et (2) sont l'une et l'autre satisfaites, les deux étoiles, dans leur révolution diurne, auront successivement même azimut et même hauteur aux heures sidérales respectives θ et θ' du lieu de colatitude φ, heures calculables par les formules données précédemment.

On voit d'ailleurs que pour deux étoiles données, il y a en général une infinité de valeurs de φ qui satisfont à la fois à ces inégalités.

REMARQUE.

Les conditions de possibilité des deux exercices précédents résultent immédiatement de ce que la condition de réalité des racines de toute équation de la forme

$$a \sin x + b \cos x = c,$$

est

$$a^2 + b^2 > c^2.$$

66e Exercice.

Quelle est la condition pour que deux étoiles E $(\mathcal{AR}, \mathcal{D})$, E' $(\mathcal{AR}', \mathcal{D}')$ *traversent en même temps l'horizon d'un lieu de colatitude* φ*?*

Solution : 1° La condition nécessaire et suffisante pour que E, E' puissent traverser en même temps l'horizon du lieu, est que l'un des pôles A du grand cercle EE', pendant sa révolution diurne, passe par le zénith ou le nadir du lieu, c'est-à-dire

$$\text{tg}^2\, p = \text{tg}^2\, \varphi,$$

en désignant par p la distance polaire de A, ou bien, en adoptant les notations des exercices précédents et remplaçant $\text{tg}^2\, p$ par sa valeur tirée de (8) (EXERCICE 62),

(1) $$(2 \sin \mathfrak{L} \sin \mathfrak{L}' \operatorname{tg} \varphi)^2 = \sin^2 2\text{P} \operatorname{séc}^2 d + \sin^2 2\text{Q} \operatorname{coséc}^2 d.$$

Supposons la condition (1) remplie et calculons les angles horaires t, t' des étoiles E, E' à l'époque de leur passage par l'horizon. Les formules connues

$$\cos t = -\cot \varphi . \cot \mathfrak{L},$$
$$\cos t' = -\cot \varphi . \cot \mathfrak{L}',$$

donnent

$$t = \mp \tau, \quad t' = \mp \tau',$$

où τ est un angle pris en valeur absolue entre 0 et π. Le signe *moins* répond au lever, le signe *plus* au coucher.

L'époque sidérale θ à laquelle les deux étoiles sont en même temps à l'horizon du lieu est fournie par l'une ou l'autre des formules

(2) $$\theta = t + \mathcal{A}, \quad \theta = t' + \mathcal{A}',$$

où les valeurs de t, t' doivent être prises avec des signes tels que l'on ait

(3) $$t - t' = \mathcal{A}' - \mathcal{A}.$$

Les levers de E, E' ou leurs couchers sont simultanés s'il faut prendre les valeurs de t, t', toutes deux négatives ou positives. Le lever de E est simultané du coucher de E' ou inversement s'il faut prendre t négatif et t' positif ou inversement.

Dans l'intervalle de 24 heures sidérales, la simultanéité des passages de E, E' par l'horizon considéré n'aura lieu qu'une seule fois, à moins que l'on ait

$$2d = \mathcal{A}' - \mathcal{A} = 0, \quad \text{ou} \quad 180^\circ.$$

Dans le premier cas, l'équation (1) se réduit à

$$\sin^2 2\text{Q} = 0,$$

on doit avoir

$$2\text{Q} = 0, \quad \text{ou} \quad \mathfrak{L}' = \mathfrak{L};$$

les deux étoiles se confondent.

Dans le deuxième cas, l'équation (1) se réduit à

$$\sin^2 2P = 0,$$

on doit avoir

$$2P = 180°, \quad \text{ou} \quad \mathfrak{L}' + \mathfrak{L} = 180°;$$

les deux étoiles sont diamétralement opposées et le lever de l'une est toujours simultané du coucher de l'autre. Cette simultanéité se produit à 12 heures sidérales d'intervalle ou deux fois en 24 heures.

2° On obtient facilement la condition cherchée en appliquant le problème 64e dans le cas où $z = 90°$.

On a en effet :

$$\cos t = -\operatorname{cotg} \varphi \operatorname{cotg} \mathfrak{L},$$

$$\cos t' = -\operatorname{cotg} \varphi \operatorname{cotg} \mathfrak{L}';$$

d'où

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} 2 \cos \tau \cos d &= -\frac{\operatorname{cotg} \varphi \sin 2P}{\sin \mathfrak{L} \sin \mathfrak{L}'}, \\ 2 \sin \tau \sin d &= -\frac{\operatorname{cotg} \varphi \sin 2Q}{\sin \mathfrak{L} \sin \mathfrak{L}'}. \end{aligned} \right.$$

Éliminons τ et nous aurons la relation demandée

$$(5) \quad (2 \sin \mathfrak{L} \sin \mathfrak{L}' \operatorname{tg} \varphi)^2 = \sin^2 2P \operatorname{séc}^2 d + \sin^2 2Q \operatorname{coséc}^2 d.$$

67e Exercice.

Deux étoiles connues se lèvent et se couchent en même temps en un certain lieu. Trouver la colatitude de ce lieu et le temps.

Solution : Il suffit de reprendre les formules de l'exercice précédent qui donnent immédiatement φ, t, t' et θ.

Le lieu des points zénithaux dont l'horizon est traversé au même moment par deux étoiles données se compose évidemment des deux parallèles célestes décrits par les pôles du grand cercle que déterminent ces étoiles.

68^{e} Exercice.

Deux étoiles connues E ($\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$), E' ($\mathcal{A}'$, $\mathcal{D}'$) *ont même azimut, à* 180° *près, à une heure sidérale donnée* θ *d'un certain lieu. Calculer cet azimut* a *et la colatitude* φ *du lieu.*

Solution : En conservant les mêmes notations, les équations (1) et (2) de l'exercice 63^{e} s'appliquent à celui-ci. Connaissant θ, on a d'abord

$$t = \theta - \mathcal{A}, \quad t' = \theta - \mathcal{A}', \quad \tau = \theta - \tfrac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}'),$$

on tire ensuite φ de l'équation (2) et a de l'une ou l'autre des équations (1).

69^{e} Exercice.

Deux étoiles connues E ($\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$), E' ($\mathcal{A}'$, $\mathcal{D}'$) *ont même distance zénithale à une heure sidérale donnée* θ *d'un certain lieu. Calculer cette distance* z *et la colatitude* φ *du lieu.*

Solution : En conservant les mêmes notations, les équations (1), (2), (3), (4) de l'exercice 64^{e} s'appliquent à celui-ci. Connaissant θ, on a d'abord

$$t = \theta - \mathcal{A}, \quad t' = \theta - \mathcal{A}', \quad \tau = \theta - \tfrac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}').$$

On tire ensuite φ de l'équation (4) et z de l'une ou l'autre des équations (1).

70^{e} Exercice.

Deux étoiles connues E ($\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$), E' ($\mathcal{A}'$, $\mathcal{D}'$) *ont même azimut connu* a, *à la même époque sidérale d'un lieu. Calculer cette époque* θ *et la colatitude* φ *du lieu.*

71e Exercice.

Deux étoiles connues E $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$, E' $(\mathcal{A}', \mathcal{D}')$ *ont même distance zénithale connue* z, *à la même époque sidérale d'un lieu. Calculer cette époque* θ *et la colatitude* φ *du lieu.*

Le lecteur trouvera aisément la solution de ces deux exercices faciles.

72e Exercice.

En un lieu de colatitude donnée φ, *quelle est l'heure sidérale* θ *à laquelle les hauteurs de deux étoiles données* E $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$, E' $(\mathcal{A}', \mathcal{D}')$ *sont égales et de signes contraires? Calculer, pour cette époque, les azimuts* a, a' *et les distances zénithales* z, z' *de ces étoiles.*

Solution : Si nous désignons par t, t' les angles horaires de E, E' à l'époque θ, nous avons le système d'équations

$$(1)\qquad z + z' = \pi,$$
$$(2)\qquad \cos z = \cos \mathcal{D} \cos \varphi + \sin \mathcal{D} \sin \varphi \cos t,$$
$$(3)\qquad \cos z' = \cos \mathcal{D}' \cos \varphi + \sin \mathcal{D}' \sin \varphi \cos t',$$

entre lesquelles l'élimination de z, z' donne

$$(4)\quad (\cos \mathcal{D} + \cos \mathcal{D}') + \operatorname{tg} \varphi (\sin \mathcal{D} \cos t + \sin \mathcal{D}' \cos t') = 0,$$

ou, en conservant la notation des exercices précédents,

$$(5)\ \sin P \cos Q \cos d . \cos \tau + \cos P \sin Q \sin d \sin \tau + \cot \varphi \cos P \cos Q = 0;$$

τ étant déterminé et calculé par l'équation (5), on aura

$$t = \tau - \tfrac{1}{2} (\mathcal{A} - \mathcal{A}'), \qquad t' = \tau + \tfrac{1}{2} (\mathcal{A} - \mathcal{A}');$$

on calculera enfin z, z' par les formules (2), (3) et a, a' par celles-ci :

$$\sin a = \sin \mathcal{D} \sin t \operatorname{coséc} z,$$
$$\sin a' = \sin \mathcal{D} \sin t \operatorname{coséc} z',$$

Nous abandonnons la discussion au lecteur.

73e Exercice.

En un lieu de colatitude donnée φ, *quelle est l'époque sidérale* θ *à laquelle les azimuts* a, a' *de deux étoiles connues* E ($\mathcal{AR}$, $\mathfrak{D}$), E' ($\mathcal{AR}'$, $\mathfrak{D}'$) *sont égaux et de signes contraires? Calculer, à cette époque, les valeurs de* a, a' *et des distances zénithales correspondantes* z, z' *de* E, E'.

Solution : Si nous désignons par t, t' les angles horaires E, E' à l'époque θ, nous aurons d'abord le système d'équations

$$(1) \qquad a + a' = 0,$$

$$(2) \qquad \cot \mathfrak{D} \sin \varphi = \cos \varphi \cos t - \sin t \cot a,$$

$$(3) \qquad \cot \mathfrak{D}' \sin \varphi = \cos \varphi \cos t' - \sin t' \cot a',$$

entre lesquelles l'élimination de a, a' donne

$$(4) \qquad (\sin t' \cot \mathfrak{D} + \sin t \cot \mathfrak{D}') = \cot \varphi \sin (t' + t).$$

Posons

$$(5) \qquad \begin{cases} t' + t = 2\tau, & \mathfrak{D}' + \mathfrak{D} = 2P, \\ t' - t = \mathcal{AR} - \mathcal{AR}' = 2d, & \mathfrak{D}' - \mathfrak{D} = 2Q, \end{cases}$$

nous pourrons, pour déterminer l'inconnue auxiliaire τ, mettre l'équation (4) sous la forme

$$(6) \quad \sin 2P \cos d \sin \tau + \sin 2Q \sin d \cos \tau = \cot \varphi \sin \mathfrak{D} \sin \mathfrak{D}' \sin 2\tau,$$

τ étant connu par la résolution de l'équation (6), les premières formules (5) donneront t, t' et les formules (2), (3) donneront a, a'. On calculera ensuite θ, z, z' par les relations

$$\theta = t + \mathcal{AR} = t' + \mathcal{AR}',$$

$$\sin z = \sin \mathfrak{D} \sin t \operatorname{coséc} a.$$

$$\sin z' = \sin \mathfrak{D}' \sin t' \operatorname{coséc} a'.$$

Nous ne nous arrèterons pas à la discussion du problème.

74ᵉ Exercice.

On a observé les époques sidérales θ, θ' *pour lesquelles deux étoiles connues* E ($\mathcal{A}$, $\mathfrak{D}$), E' ($\mathcal{A}'$, $\mathfrak{D}'$) *atteignent respectivement la même distance zénithale. Calculer cette distance* z *et la colatitude* φ *de l'observateur.*

Solution : Les angles horaires t, t' des deux étoiles aux époques θ, θ' sont

$$t = \theta - \mathcal{A}, \qquad t' = \theta' - \mathcal{A}',$$

et, pour déterminer z et φ, nous avons les deux relations

$$(1) \qquad \cos z = \cos\varphi \cos\mathfrak{D} + \sin\varphi \sin\mathfrak{D} \cos t,$$

$$(2) \qquad \cos z = \cos\varphi \cos\mathfrak{D}' + \sin\varphi \sin\mathfrak{D}' \cos t',$$

qui donnent

$$(3) \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos\mathfrak{D}' - \cos\mathfrak{D}}{\sin\mathfrak{D}\cos t - \sin\mathfrak{D}'\cos t'},$$

φ étant calculé par la formule (3), z sera calculable par l'une ou l'autre des formules (1), (2).

75ᵉ Exercice.

On a observé les époques sidérales θ, θ' *des passages de deux étoiles* E ($\mathcal{A}$, $\mathfrak{D}$), E' ($\mathcal{A}'$, $\mathfrak{D}'$) *à travers le même cercle vertical. Calculer la colatitude* φ *du lieu et l'azimut* a *du cercle vertical.*

Solution : Soient t, t' les angles horaires, on a

$$(1) \qquad \begin{cases} t = \theta - \mathcal{A}, \\ t' = \theta' - \mathcal{A}', \end{cases}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} \operatorname{cotg}\mathfrak{D} \sin\varphi = \cos\varphi\cos t - \sin t \operatorname{cotg} a, \\ \operatorname{cotg}\mathfrak{D}' \sin\varphi = \cos\varphi\cos t' - \sin t' \operatorname{cotg} a, \end{cases}$$

ou bien

$$(3) \qquad \begin{cases} \cos t \operatorname{tg} a \cos\varphi - \operatorname{cotg}\mathfrak{D} \operatorname{tg} a \sin\varphi = \sin t, \\ \cos t' \operatorname{tg} a \cos\varphi - \operatorname{cotg}\mathfrak{D}' \operatorname{tg} a \sin\varphi = \sin t'. \end{cases}$$

Prenons tg a cos φ, tg a sin φ pour inconnues. Les équations (3) résolues par rapport à ces quantités nous donneront

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tg} a \sin\varphi &= -\frac{\sin(t'-t)}{\cos t \operatorname{cotg} \mathfrak{L}' - \cos t' \operatorname{cotg} \mathfrak{L}} = \mathrm{M}, \\ \operatorname{tg} a \cos\varphi &= \frac{\sin t \operatorname{cotg} \mathfrak{L}' - \sin t' \operatorname{cotg} \mathfrak{L}}{\cos t \operatorname{cotg} \mathfrak{L}' - \cos t' \operatorname{cotg} \mathfrak{L}} = \mathrm{N}. \end{aligned}\right.$$

En désignant par M, N les seconds membres de (4), on déterminera φ et a par les relations

$$(5)\qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}, \quad \operatorname{tg} a = \frac{\mathrm{M}}{\sin\varphi} = \frac{\mathrm{N}}{\cos\varphi}.$$

76e Exercice.

On a observé, au même moment, les distances zénithales z_1, z_2 *de deux étoiles connues* $E_1(\mathcal{A}_1, \mathfrak{L}_1)$, $E_2(\mathcal{A}_2, \mathfrak{L}_2)$. *Quelle est la colatitude* φ *de l'observateur et l'heure sidérale locale* θ *de l'observation?*

Solution : Désignons par t_1, t_2 les angles horaires de E_1, E_2 au moment de l'observation et posons

$$t_1 + t_2 = 2\tau, \qquad t_1 - t_2 = \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1 = 2d,$$

on sait que

$$\theta = t_1 + \mathcal{A}_1 = t_2 + \mathcal{A}_2,$$

et que les triangles PZE_1, PZE_2 *(fig. 50)* formés par le pôle P de la sphère céleste, le zénith Z du lieu cherché, respectivement avec chacune des étoiles, donnent immédiatement les relations

$$\begin{aligned} \cos z_1 &= \cos \mathfrak{L}_1 \cos\varphi + \sin \mathfrak{L}_1 \sin\varphi \cos t_1, \\ \cos z_2 &= \cos \mathfrak{L}_2 \cos\varphi + \sin \mathfrak{L}_2 \sin\varphi \cos t_2, \end{aligned}$$

ou bien, en remplaçant t_1, t_2 par

$$t_1 = \tau + d, \qquad t_2 = \tau - d,$$

et posant

$$x = \cos\varphi, \qquad y = \sin\varphi\cos\tau, \qquad u = \sin\varphi\sin\tau,$$

les relations équivalentes

$$x \cos \mathfrak{L}_1 + y \sin \mathfrak{L}_1 \cos d - u \sin \mathfrak{L}_1 \sin d = \cos z_1,$$
$$x \cos \mathfrak{L}_2 + y \sin \mathfrak{L}_2 \cos d + u \sin \mathfrak{L}_2 \sin d = \cos z_2,$$

qui, jointes à

$$x^2 + y^2 + u^2 = 1,$$

donnent pour x, y, u deux systèmes de valeurs simultanées x', y', u' et x'', y'', u''. Si ces systèmes sont réels, les valeurs φ', τ' et φ'', τ'' de φ, τ correspondant à chacun de ces systèmes, sont fournies par les équations

(1) $\cos \varphi' = x', \quad \cos \tau' = y' \operatorname{coséc} \varphi', \quad \sin \tau' = u' \operatorname{coséc} \varphi',$

(2) $\cos \varphi'' = x'', \quad \cos \tau'' = y'' \operatorname{coséc} \varphi'', \quad \sin \tau'' = u'' \operatorname{coséc} \varphi'',$

φ' et φ'' devant être compris entre 0 et π, τ' et τ'' étant donnés à la fois par leur sinus et leur cosinus ne sont susceptibles que d'une seule détermination par les équations (1), (2).

Il y aura deux lieux Z′, Z″ répondant à la question et l'heure sidérale locale de l'observation sera pour chacun d'eux respectivement

(3) $$\theta' = \tau' + d + \mathcal{A}_1 = \tau' - d + \mathcal{A}_2,$$

(4) $$\theta'' = \tau'' + d + \mathcal{A}_1 = \tau'' - d + \mathcal{A}_2.$$

Quant à la réalité des valeurs de x, y, u, à laquelle est subordonnée l'application des formules (1), (2), (3), (4), le moyen le plus court de la constater consiste à calculer la distance angulaire δ des étoiles par la relation

$$\cos \delta = \cos \mathfrak{L}_1 \cos \mathfrak{L}_2 + \sin \mathfrak{L}_1 \sin \mathfrak{L}_2 \cos 2d,$$

et de voir si l'on peut former un triangle sphérique avec δ, z_1, z_2, c'est-à-dire si l'un quelconque de ces arcs est plus petit que la somme des deux autres. Lorsque ce triangle est possible, il existe évidemment deux lieux à l'intersection des cercles décrits de E_1, E_2 comme pôles avec z_1, z_2 pour rayons respectifs, qui répondent à la question et l'emploi des formules précédentes donne des résultats réels.

REMARQUES.

I. — Si l'on observe simultanément trois étoiles, on a trois équations linéaires en x, y, u, le problème n'admet plus qu'une seule solution.

II. — Si l'on observe quatre étoiles ou un plus grand nombre, il faut résoudre les équations en x, y, u par la méthode des moindres carrés, pour obtenir la solution unique la plus probable.

77e Exercice.

On a observé les azimuts simultanés a, a' de deux étoiles connues E ($\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$), E' ($\mathcal{A}'$, $\mathcal{D}'$). *Calculer la colatitude φ de l'observateur et l'heure sidérale θ de l'observation.*

Solution : Si t, t' désignent les angles horaires simultanés des deux étoiles, nous avons les quatre relations :

$$\theta = t + \mathcal{A} = t' + \mathcal{A}', \tag{1}$$

$$\cot \mathcal{D} \sin \varphi = \cos \varphi \cos t - \sin t \cot a, \tag{2}$$

$$\cot \mathcal{D}' \sin \varphi = \cos \varphi \cos t' - \sin t' \cot a', \tag{3}$$

pour déterminer les auxiliaires t, t' et les inconnues φ, θ. Posons

$$(4)\ \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}' + \mathcal{D} = 2\mathrm{P}, \\ \mathcal{D}' - \mathcal{D} = 2\mathrm{Q}, \end{array} \right. \qquad (5)\ \left\{ \begin{array}{l} t' + t = 2\tau, \\ t' - t = \mathcal{A} - \mathcal{A}' = 2d, \end{array} \right.$$

les équations (2), (3) pourront s'écrire

$$(6)\ \left\{ \begin{array}{l} \cot \mathcal{D} \sin \varphi = (\cos \varphi \cos d + \cot a \sin d) \cos \tau + (\cos \varphi \sin d - \cot a \cos d) \sin \tau, \\ \cot \mathcal{D}' \sin \varphi = (\cos \varphi \cos d - \cot a' \sin d) \cos \tau - (\cos \varphi \sin d + \cot a' \cos d) \sin \tau. \end{array} \right.$$

Les équations (6) étant résolues par rapport à φ et τ, les relations (5) et (1) donneront t, t' et θ.

78e Exercice.

Voulant, pour déterminer l'heure, prendre au sextant la hauteur de l'étoile A, *on a mesuré, par erreur, la distance angulaire*

$A'B = s$ d'une étoile B à l'image A' de A sur le bain de mercure ou le miroir en verre. Connaissant les coordonnées équatoriales $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$; $\mathcal{A}'$, $\mathcal{D}'$ des deux étoiles, calculer :

1° Leurs distances zénithales z, z' et leurs angles horaires t, t' au moment de l'observation;

2° L'angle, à ce moment, du limbe du sextant avec le vertical de A ou de A'.

Solution : 1° Soient *(fig. 50 bis) :*

$\varphi =$ la latitude de l'observateur;
$t' + t = 2x$;
$t' - t = 2\alpha = \mathcal{A} - \mathcal{A}'$;
$m =$ AB la distance angulaire des deux étoiles;
$2\omega =$ leur différence d'azimut AZB au moment de l'observation.

On a les relations

$$(1)\qquad \begin{cases} \cos z = \sin\varphi \sin\mathcal{D} + \cos\varphi\cos\mathcal{D}\cos t, \\ \cos z' = \sin\varphi\sin\mathcal{D}' + \cos\varphi\cos\mathcal{D}'\cos t', \end{cases}$$

fournies par les triangles PZA, PZB. Les triangles ZAB, ZA'B donnent ensuite

$$\cos m = \cos z\cos z' + \sin z\sin z'\cos 2\omega,$$
$$\cos s = -\cos z\cos z' + \sin z\sin z'\cos 2\omega,$$

d'où l'on tire, en retranchant membre à membre,

$$2\cos z\cos z' = \cos m - \cos s.$$

L'arc s est donné par l'observation et l'arc m par la formule

$$\cos m = \sin\mathcal{D}\sin\mathcal{D}' + \cos\mathcal{D}\cos\mathcal{D}'\cos 2\alpha,$$

on peut donc regarder $2\cos z\cos z'$ comme connu.

Les équations (1) multipliées membre à membre donnent

$$(2)\qquad \begin{cases} \cos m - \cos s = 2\sin^2\varphi\sin\mathcal{D}\sin\mathcal{D}' \\ \qquad + 2\sin\varphi\cos\varphi(\sin\mathcal{D}\cos\mathcal{D}'\cos t' + \sin\mathcal{D}'\cos\mathcal{D}\cos t) \\ \qquad\qquad + 2\cos^2\varphi\cos\mathcal{D}\cos\mathcal{D}'\cos t\cos t'. \end{cases}$$

Mais

$$t' = x + \alpha,$$
$$t = x - \alpha,$$
$$2 \cos t \cos t' = \cos 2x + \cos 2\alpha.$$

L'équation (2) est donc de la forme

$$(3) \qquad A \cos 2x + B \cos x + C \sin x + D = 0,$$

où

$A = \cos^2 \varphi \cos \mathfrak{D} \cos \mathfrak{D}'$,
$B = \sin 2\varphi \sin (\mathfrak{D} + \mathfrak{D}') \cos \alpha$,
$C = \sin 2\varphi \sin (\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}) \sin \alpha$,
$D = 2 \sin^2 \varphi \sin \mathfrak{D} \sin \mathfrak{D}' + \cos^2 \varphi \cos \mathfrak{D} \cos \mathfrak{D}' \cos 2\alpha - (\cos m - \cos s)$.

L'équation (3) est du quatrième degré en $\sin x$ ou $\cos x$ et il est facile d'interpréter les quatre solutions.

On connaît une valeur approchée de la racine x qui nous intéresse en répondant à la question. En effet, l'erreur commise est due à ce que les étoiles A et B, que l'on a d'ailleurs reconnues après l'observation, sont sensiblement dans le même vertical. On a donc approximativement

$$\tfrac{1}{2} AA' = 90^\circ - z = \tfrac{1}{2} (s \pm m);$$

en prenant le signe + ou le signe — suivant que B sera *au-dessous* ou *au-dessus* de A. On tire de là d'abord

$$z = 90^\circ - \tfrac{1}{2} (s \pm m).$$

Avec cette valeur de z, on déduit t de la première équation (1) et, par suite, une valeur approchée $(t + \alpha)$ de x. En partant de cette valeur approchée, on déduit, par la règle des approximations successives de Newton, la solution exacte de (3) qui convient à la question.

x étant trouvé, les formules précédentes donnent immédiatement t, t', z, z'.

2° Au moment de l'observation, le plan du limbe du sextant est celui de l'arc A'B; les angles qu'il forme avec les verticaux ZAA', ZB sont donnés par le triangle ZA'B dont les trois côtés sont actuellement connus. On a ainsi :

$$\cos i = \frac{\cos z' + \cos s \cos z}{\sin s \sin z}.$$

3° Si l'on veut tenir compte des effets dz, dz' de la réfraction sur z, z', il suffit de calculer ds par la formule

$$ds = dz \cos A' + dz' \cos B,$$

puis de recommencer les calculs précédents en y remplaçant s par $s + ds$.

APPLICATION NUMÉRIQUE.

1883 JANVIER 28.

Observation de l'image directe de α² Gémeaux et de l'image doublement réfléchie de β Gémeaux.

Heure de la pendule Fénon : $7^h 9^m 53^s$. — Correction approximative : $+ 2^m 24^s$.

DONNÉES :

α² Gémeaux $\begin{cases} \mathcal{A} = 7^h 27^m 11^s. \\ \mathcal{D} = +32^\circ 8' 27''. \end{cases}$

β Gémeaux $\begin{cases} \mathcal{A}' = 7^h 38^m 12^s. \\ \mathcal{D}' = +28^\circ 18' 15''. \end{cases}$

$\varphi = 47^\circ 13' 46''$

$\mathcal{A}' - \mathcal{A} = 2\alpha = 11^m 1^s.$
$= 2^\circ 45' 15''.$

$\mathcal{D}' + \mathcal{D} = 60^\circ 26' 42''.$

$\mathcal{D}' - \mathcal{D} = - 3^\circ 50' 12''.$

$\begin{cases} \log \sin \varphi = \bar{1}.865.74. \\ \log \cos \varphi = \bar{1}.831.91. \end{cases}$

1° Calcul de m ; $\cos m$.

$\begin{cases} \log \sin \mathcal{D} = \bar{1}.72591 \\ \log \sin \mathcal{D}' = \bar{1}.67592 \end{cases}$
$= \bar{1}.40183$

$\begin{cases} \log \cos \mathcal{D} = \bar{1}.92775 \\ \log \cos \mathcal{D}' = \bar{1}.94471 \\ \log \cos 2\alpha = \bar{1}.99950 \end{cases}$
$= \bar{1}.87196$

Reste $= 0.47013$
log d'add. $= 0.12669$
$\log \cos m = \bar{1}.99865$
$\cos m = 0.9969$
$m = 4^\circ 31' 0''$

2° Calcul de $\cos s$; $\cos m - \cos s$.

s observé =	89° 20′ 40″
point de pll. =	− 2 45 15
Reste =	86 35 25
½ reste =	43 17 42
Réfraction =	1 2
½ s =	43 16 40
s =	86 33 20
$\log \cos s$ =	$\bar{2}.77873$
$\cos s$ =	0.0601
$\cos m - \cos s$ =	0.9368

3° Calcul des coefficients A, B, C, D.

CALCUL DE A.

$$\begin{aligned} \log\cos^2\varphi &= \bar{1}.66382 \\ \log\cos\mathfrak{D} &= \bar{1}.92775 \\ \log\cos\mathfrak{D}' &= \bar{1}.94471 \\ \hline \log A &= \bar{1}.53628 \\ A &= 0,34378 \end{aligned}$$

CALCUL DE B.

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0.30103 \\ \log\sin\varphi\cos\varphi &= \bar{1}.69765 \\ \log\sin(\mathfrak{D}+\mathfrak{D}') &= \bar{1}.93946 \\ \log\cos\alpha &= \bar{1}.99987 \\ \hline \log B &= \bar{1}.93801 \\ B &= 0.86698 \end{aligned}$$

CALCUL DE C.

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0.30103 \\ \log\sin\varphi\cos\varphi &= \bar{1}\ 69765 \\ \log\sin(\mathfrak{D}'-\mathfrak{D}) &= (n)\ \bar{2}.82550 \\ \log\sin\alpha &= \bar{2}.38075 \\ \log C &= \bar{3}.20493 \\ C &= -\ 0,001603 \end{aligned}$$

CALCUL DE D.

$$\begin{aligned} \Bigg\{\ \log 2 &= 0.30103 \\ \log\sin^2\varphi &= \bar{1}.73148 \\ \log\sin\mathfrak{D}\sin\mathfrak{D}' &= \bar{1}.40183 \\ \hline &\quad \bar{1}.43434 \\ \Big\{\ \log A &= \bar{1}.53628 \\ \log\cos 2\alpha &= \bar{1}.99950 \\ \hline &\quad \bar{1}.53578 \\ \text{»} &\quad 0.10144 \\ \log \text{d'add.} &= 0.25326 \\ \log[D+(\cos m-\cos s)] &= \bar{1}.78904 \\ D+\cos m-\cos s &= 0.61523 \\ D &= -\ 0,32157 \end{aligned}$$

4° Équation en x.

$$0,34378\cos 2x + 0,86698\cos x - 0,00160\sin x - 0,32157 = 0.$$

5° Calcul de la valeur approchée de la racine.

$$z = 90° - \tfrac{1}{2}(s+m) = 44°\,27'\,50''.$$

$$\begin{aligned} \log\cos z &= \bar{1}.85351 \\ \log\sin\varphi\cos\mathfrak{D} &= \bar{1}.59165 \\ \text{»} &\quad 0,26186 \\ \log \text{soust.} &= 0,34411 \\ \text{»} &\quad \bar{1}.50940 \\ \log\cos\varphi\cos\mathfrak{D} &= \bar{1}.75966 \\ \log\cos t &= \bar{1}.74974 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= 55°\,48'\,15'' \\ \alpha &= 1.22.37 \\ x = t+\alpha &= 57°\,10'\,52'' \end{aligned}$$

6° Calcul, par la méthode de Newton, de la correction à apporter à la valeur $x = 57°10'52''$.

$$f(x) = 0{,}34378 \cos 2x + 0{,}86698 \cos x - 0{,}00160 \sin x - 0{,}32157 = 0;$$

d'où

$$f'(x) = -2.0{,}34378 \sin 2x - 0.86698 \sin x - 0.00160 \cos x,$$

$$f(x) = f(t+\alpha) = +0{,}00516,$$
$$f'(x) = f'(t+\alpha) = -1{,}35581,$$
$$\text{correction de la valeur de } x = \frac{0{,}00516}{1{,}35581} = 0{,}00381,$$
$$= +13'6'',$$
$$x = 57°23'58'',$$
$$t = 56°\ 1'21'',$$
$$t = 3^h44^m5^s.$$

7° Calcul de l'heure moyenne et de la correction de la pendule.

$t =$	$-\ 3^h44^m\ 5^s$
$\mathcal{R} =$	7 27 11
$H_s =$	3 43 6
H_s à midi moyen =	20 29 34
$\mathfrak{T}_s$ écoulé =	7 13 32
Conversion en $\mathfrak{T}$ moyen =	1 11
$H_m =$	7 12 21
H de la pendule =	7 9 53
Correction de la pendule =	+ 2 28

8° Calcul de l'angle i du limbe du sextant avec le vertical passant par α^2 Gémeaux.

Calcul de $\cos z$.

$$\sin\varphi \sin \mathfrak{D} = \bar{1}.59165$$
$$\cos\varphi \cos \mathfrak{D} = \bar{1}.75966$$
$$\cos t = \bar{1}.74731$$
$$\bar{1}.50697$$
$$R = 0{,}08468$$
$$\log \text{d'add.} = 0{,}26076$$
$$\log \cos z = \bar{1}.85244$$

Calcul de $\cos z'$.

$$\sin\varphi \sin \mathfrak{D}' = \bar{1}.54166$$
$$\cos\varphi \cos \mathfrak{D}' = \bar{1}.71464$$
$$\cos t' = \bar{1}.77662$$
$$\bar{1}.49126$$
$$R = 0{,}05040$$
$$\log \text{d'add.} = 0{,}27656$$
$$\log \cos z' = \bar{1}.81822$$

Calcul de i.

$$\log \cos z' = \bar{1}.81822$$
$$\log \cos z \cos s = \bar{2}.63114$$
$$R = 1.18708$$
$$\log \text{d'add.} \quad 0.02734$$
$$\log \text{numérateur} = \bar{1}.84556$$
$$\log \sin z \sin s = \bar{1}.84573$$
$$\log \cos i = \bar{1}.99983$$
$$i = 1^\circ 36'$$

79e Exercice.

SUR LE MICROMÈTRE CIRCULAIRE.

Ce micromètre n'est pas autre chose qu'un léger anneau plat, exactement circulaire, métallique, placé au foyer de l'objectif, son plan étant perpendiculaire à l'axe optique de la lunette. Quoique inférieur en exactitude au fil micrométrique et à l'héliomètre, il possède sur le premier l'avantage de ne pas demander d'éclairage, et sur tous deux de n'exiger aucune orientation et, par suite, aucune monture équatoriale pour la lunette. Il n'exige, en outre, aucune vis micrométrique.

Soient (*fig.* 51) :

ABB'A' le bord intérieur de l'anneau;

t_1, t_2 les époques sidérales d'entrée et de sortie d'une étoile E en A et B;

t'_1, t'_2 les époques d'entrée et de sortie d'une autre étoile E' en A' et B'.

α, δ et α', δ' les coordonnées équatoriales de E et E'.

Supposant rectiligne la course de chaque étoile à travers le champ, la perpendiculaire CMM' aux cordes AB, A'B' représente le cercle de déclinaison du centre C. Les époques de passage par ce cercle des deux étoiles sont respectivement $\frac{1}{2}(t_1 + t_2)$, $\frac{1}{2}(t'_1 + t'_2)$ et l'on a

$$\alpha' - \alpha = \tfrac{1}{2}(t'_1 + t'_2) - \tfrac{1}{2}(t_1 + t_2).$$
$$\delta' - \delta = MM'.$$

Soit r le rayon du micromètre exprimé en secondes d'arc; et posons :

$$\tau = t_2 - t_1, \qquad \tau' = t'_2 - t'_1,$$
$$\gamma = BCM, \qquad \gamma' = B'CM',$$
$$d = MC, \qquad d' = M'C,$$
$$\mu = BM, \qquad \mu' = B'M'.$$

On a :

$$\mu = \frac{15}{2} \cdot \tau \cos \delta, \qquad \mu' = \frac{15}{2} \tau' \cos \delta',$$
$$\sin \gamma = \frac{\mu}{r}, \qquad \sin \gamma' = \frac{\mu'}{r},$$
$$d = r \cos \gamma, \qquad d' = r \cos \gamma'.$$
$$\delta' - \delta = \pm (d' \pm d).$$

On prendra les signes + ou les signes — d'après les positions relatives des points C, M, M' dans le champ du réticule.

Pour l'exacte détermination des différences d'ascension droite, il est clair que les étoiles doivent passer aussi près que possible du centre, car les immersions et émersions s'observent alors avec plus de précision.

DÉTERMINATION DU RAYON DU MICROMÈTRE.

Observons deux étoiles, de déclinaisons connues; nous avons :

$$\mu + \mu' = r(\sin \gamma + \sin \gamma') = 2r \sin \tfrac{1}{2}(\gamma + \gamma') \cos \tfrac{1}{2}(\gamma - \gamma'),$$
$$\mu - \mu' = r(\sin \gamma - \sin \gamma') = 2r \cos \tfrac{1}{2}(\gamma + \gamma') \sin \tfrac{1}{2}(\gamma - \gamma');$$

de plus,

$$r = \frac{\delta' - \delta}{\cos \gamma + \cos \gamma'} = \frac{\delta' - \delta}{2 \cos \frac{1}{2}(\gamma + \gamma') \cos \frac{1}{2}(\gamma - \gamma')},$$

en supposant les étoiles observées de chaque côté du centre. D'où :

$$\frac{\mu + \mu'}{\delta' - \delta} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\gamma + \gamma'), \qquad \frac{\mu - \mu'}{\delta' - \delta} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\gamma - \gamma').$$

Si nous posons

$$2A = \gamma + \gamma', \quad 2B = \gamma - \gamma',$$

et, par suite,

$$\frac{\mu + \mu'}{\delta' - \delta} = \operatorname{tg} A, \qquad \frac{\mu - \mu'}{\delta' - \delta} = \operatorname{tg} B,$$

nous aurons

$$\begin{aligned} r &= \frac{\delta' - \delta}{2 \cos A \cos B}, \\ &= \frac{\mu + \mu'}{2 \sin A \cos B}, \\ &= \frac{\mu - \mu'}{2 \cos A \sin B}, \\ &= \frac{\mu}{\sin (A + B)}, \\ &= \frac{\mu'}{\sin (A - B)}. \end{aligned}$$

80e Exercice.

Corriger des effets de la réfraction les différences d'ascension droite $\mathcal{A}' - \mathcal{A}$ *et de déclinaison* $\mathcal{D}' - \mathcal{D}$ *observées à l'équatorial entre deux étoiles voisines* E, E'.

Solution : L'étoile observée en E sur la sphère céleste se trouve en réalité un peu plus bas en E_1 sur le vertical ZE *(fig. 52)* et si l'on désigne les coordonnées équatoriales de E par $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ et celles de E_1 par $\mathcal{A} + \delta\mathcal{A}$, $\mathcal{D} + \delta\mathcal{D}$, on obtiendra les accroissements $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{D}$ en considérant, dans le triangle PZE, le côté PZ et l'angle Z comme fixes; mais le côté ZE comme recevant l'accroissement EE_1 qui entraîne dans le côté PE et l'angle P des accroissements correspondants. Si l'on pose, conformément à l'habitude,

$$PZ = 90° - \varphi, \quad ZE = z, \quad PE = 90° - \mathcal{D}, \quad EE_1 = \delta z,$$
$$\widehat{PZE} = 180° - a, \quad ZPE = t, \quad \widehat{EPE_1} = \delta t = -\delta A,$$

et si l'on fait dans les formules (5) (n° 233 du Cours),

$$\delta a = 0, \quad \delta\varphi = 0,$$

on a, pour déterminer $\partial\mathcal{A}$, $\partial\mathcal{D}$, les relations

$$\cos\mathcal{D}\cos q.\partial t+\sin q\,\partial\mathcal{D}=0,$$
$$\cos\mathcal{D}\sin q.\partial t-\cos q\,\partial\mathcal{D}=\partial z,$$

d'où

$$(1)\qquad \partial A=-\frac{\sin q}{\cos\mathcal{D}}\partial z\qquad \partial\mathcal{D}=-\cos q\,\partial z.$$

Les formules (1) peuvent aussi se tirer séparément du tableau B des formules différentielles (page 13 du COURS), en appliquant au triangle actuel PZE les formules 2e du 3e type et 3e du 1er type.

Le triangle PZE donne d'ailleurs les relations

$$\cos q\sin z=\sin\varphi\cos\mathcal{D}-\cos\varphi\sin\mathcal{D}\cos t=\sin\varphi\,\text{séc}\,\psi.\cos(\mathcal{D}+\psi),$$
$$\cos z=\sin\varphi\sin\mathcal{D}+\cos\varphi\cos\mathcal{D}\cos t=\sin\varphi\,\text{séc}\,\psi.\sin(\mathcal{D}+\psi),$$
$$\sin q\sin z=\cos\varphi\sin t.$$

En posant

$$\text{tg}\,\psi=\cot\varphi.\cos t,$$

on en tire

$$\sin q.\text{tg}\,z=\cot\varphi\sin t.\cos\psi\,\text{coséc}\,(\mathcal{D}+\psi)=\sin\psi\,\text{tg}\,t.\,\text{coséc}\,(\mathcal{D}+\psi),$$
$$\cos q\,\text{tg}\,z=\cot(\mathcal{D}+\psi),$$

et si l'on pose, avec une approximation suffisante dans la question actuelle,

$$dz=k.\text{tg}\,z,$$

k étant la réfraction moyenne pour $z=45^\circ$, savoir

$$k=58'',3.\sin 1'',$$

on aura

$$\sin q\,dz=k\,\text{tg}\,t.\sin\psi\,\text{coséc}\,(\mathcal{D}+\psi),$$
$$\cos q\,dz=k.\cot(\mathcal{D}+\psi);$$

par suite,

$$(2)\qquad \begin{cases}\partial\mathcal{A}=-k\,\text{séc}\,\mathcal{D}\,\text{tg}\,t.\sin\psi\,\text{coséc}\,(\mathcal{D}+\psi),\\ \partial\mathcal{D}=-k\cot(\mathcal{D}+\psi).\end{cases}$$

Pour l'étoile voisine E' ($\mathcal{A}'$, $\mathcal{D}'$), on aura deux formules pareilles en remplaçant dans (2) $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$, t, ψ par les quantités analogues $\mathcal{A}'$, $\mathcal{D}'$, t', ψ'.

Les relations (2) montrent que $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{D}$ dépendent, pour chaque observatoire, de deux variables t et $\mathcal{D}$. La différence des effets de la réfraction sur les coordonnées de E et E′, au même moment, s'obtiendrait en différentiant les équations (2) par rapport à t et $\mathcal{D}$. Mais, dans les mesures à l'équatorial, ce n'est pas au même moment qu'on observe les deux étoiles; c'est aux époques successives de leurs passages individuels par le fil horaire moyen de la lunette bien calée. On a donc

$$t' = t, \qquad \psi' = \psi.$$

et, par suite, on aura $\delta(\mathcal{A}' - \mathcal{A})$, $\delta(\mathcal{D}' - \mathcal{D})$ si on différentie les relations (2) en y regardant t comme constant et $\mathcal{D}$ comme variant seule de la quantité $\mathcal{D}' - \mathcal{D}$.

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}\delta(\mathcal{A}' - \mathcal{A}) &= k(\mathcal{D}' - \mathcal{D})\,\mathrm{tg}\,t \sin\psi\,.\,\mathrm{séc}^2\mathcal{D}\,\mathrm{coséc}^2(\mathcal{D}+\psi)\cos(2\mathcal{D}+\psi),\\ \delta(\mathcal{D}' - \mathcal{D}) &= k(\mathcal{D}' - \mathcal{D})\,\mathrm{coséc}^2(\mathcal{D}+\psi),\end{aligned}$$

ou, en faisant usage des distances polaires $\mathcal{P} = 90^\circ - \mathcal{D}$, $\mathcal{P}' = 90^\circ - \mathcal{D}'$,

$$\begin{aligned}\delta(\mathcal{A} - \mathcal{A}') &= k(\mathcal{P} - \mathcal{P}')\,\mathrm{tg}\,t \sin\psi\,\mathrm{coséc}^2\mathcal{P}\,\mathrm{séc}^2(\mathcal{P}-\psi)\cos(2\mathcal{P}-\psi),\\ \delta(\mathcal{P} - \mathcal{P}') &= k(\mathcal{P} - \mathcal{P}')\,\mathrm{séc}^2(\mathcal{P}-\psi).\end{aligned}$$

Si l'on veut exprimer $\delta(\mathcal{A} - \mathcal{A}')$ en secondes de temps et $\delta(\mathcal{P} - \mathcal{P}')$ en secondes d'arc, il suffira de remplacer dans les formules précédentes $(\mathcal{P} - \mathcal{P}')$ par sa valeur en secondes d'arc et de diviser, en outre, le second membre de la première par 15.

Si $\mathcal{P} - \mathcal{P}' = 10' = 600''$, on a ainsi

$$(3)\quad \begin{cases}\delta(\mathcal{A} - \mathcal{A}') = (\bar{2},053.30)\,\mathrm{tg}\,t \sin\psi\,\mathrm{coséc}^2\mathcal{P}\,\mathrm{séc}^2(\mathcal{P}-\psi)\cos(2\mathcal{P}-\psi),\\ \delta(\mathcal{P} - \mathcal{P}') = (\bar{1},229.39)\,\mathrm{séc}^2(\mathcal{P}-\psi).\end{cases}$$

On peut réduire ces formules en tables à double entrée, avec les arguments $\mathcal{P}$, t. Les nombres de la table, multipliés par $\dfrac{\mathcal{P} - \mathcal{P}'}{10}$, donneront les corrections à appliquer à l'observation de deux astres dont la différence, en distance polaire, est $(\mathcal{P} - \mathcal{P}')$ exprimée en minutes d'arc.

Pour l'observatoire de Besançon, où l'on a :

$$\text{latitude géographique : } \varphi = 47^\circ\,15'\ \ 0'',$$
$$\text{latitude géocentrique : } \varphi_0 = 47^\circ\ \ 3'\,34'',$$

on réduira les expressions (3) en tables, en calculant l'angle auxiliaire ψ par la formule

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{tg} \psi = \cot \varphi . \cos t,$$

ou

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{tg} \psi = \cot \varphi_0 \cos t = (\bar{1},968.75) \cos t.$$

L'emploi de la dernière introduit une erreur de l'ordre de $k(\varphi - \varphi_0)$, puisque les distances zénithales et les réfractions se comptent du zénith géographique. Mais cette erreur est entièrement négligeable dans la question actuelle. Nous donnerons la préférence à la formule (5) parce qu'elle se retrouve dans le calcul des parallaxes et leur réduction en tables.

CHAPITRE III

Mouvement diurne de trois étoiles au moins.

81ᵉ Exercice.

Calculer les coordonnées équatoriales a, p du pôle A *et le rayon sphérique* ρ *du petit cercle passant par les positions* E $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$, E′ $(\mathcal{A}', \mathcal{D}')$, E″ $(\mathcal{A}'', \mathcal{D}'')$ *de trois étoiles données.*

Solution : 1° Les triangles sphériques PAE, PAE′, PAE″ *(fig. 53)* formés respectivement par chaque étoile avec le pôle P de la sphère céleste et le pôle A du petit cercle, donnent les relations immédiates

$$\left\{\begin{aligned} \cos\rho &= \cos\mathcal{D}\cos p + \sin\mathcal{D}\sin p\cos(\mathcal{A} - a),\\ \cos\rho &= \cos\mathcal{D}'\cos p + \sin\mathcal{D}'\sin p\cos(\mathcal{A}' - a),\\ \cos\rho &= \cos\mathcal{D}''\cos p + \sin\mathcal{D}''\sin p\cos(\mathcal{A}'' - a),\end{aligned}\right.$$

ou bien,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x\cos\mathcal{D} + y\sin\mathcal{D}\cos\mathcal{A} + z\sin\mathcal{D}\sin\mathcal{A} &= 1,\\ x\cos\mathcal{D}' + y\sin\mathcal{D}'\cos\mathcal{A}' + z\sin\mathcal{D}'\sin\mathcal{A}' &= 1,\\ x\cos\mathcal{D}'' + y\sin\mathcal{D}''\cos\mathcal{A}'' + z\sin\mathcal{D}''\sin\mathcal{A}'' &= 1,\end{aligned}\right.$$

en posant

$$(2)\quad x = \cos p\,.\,\text{séc}\,\rho,\qquad y = \sin p\cos a\,\text{séc}\,\rho,\qquad z = \sin p\sin a\,\text{séc}\,\rho,$$

la résolution par logarithmes des équations (1) donne aisément x, y, z, et on tire des équations (2), pour le calcul de ρ, a, p, les

formules

$$(3) \qquad \operatorname{tg} a = \frac{z}{y}.$$

$$(4) \qquad \operatorname{tg} p = \frac{y}{x \cos a} = \frac{z}{x \sin a},$$

$$(5) \qquad \cos \rho = \frac{\cos p}{x} = \frac{\sin p \cos a}{y} = \frac{\sin p \sin a}{z}.$$

Entre 0 et 2π, la formule (3) donne pour a deux valeurs $a' = \alpha$, $a'' = \alpha + \pi$. Les valeurs correspondantes de p entre 0 et π, données par les formules (4) sont de la forme $p' = \beta$, $p'' = \pi - \beta$. Celles de ρ fournies par les formules (5) entre 0 et π et correspondantes aux systèmes a', p', a'', p'' sont également supplémentaires $\rho' = \gamma$, $\rho'' = \pi - \gamma$. Le problème admet donc les deux solutions

$$(\mathrm{A}') \qquad a' = \alpha, \qquad p' = \beta, \qquad \rho' = \gamma,$$
$$(\mathrm{A}'') \qquad a'' = \pi + \alpha, \qquad p'' = \pi - \beta, \qquad \rho'' = \pi - \gamma,$$

qui répondent aux deux pôles diamétralement opposés A′, A″ du petit cercle.

REMARQUES.

1° La détermination du rayon d'un micromètre circulaire se fait à l'aide de n équations analogues à (1) où $(\mathrm{A} - a)$ est la demie durée du passage de l'étoile dans ce micromètre.

2° Au lieu de résoudre les équations (1) par logarithmes, on peut avoir immédiatement le résultat à l'aide des formules de Cramer. En posant

$$\sin \mathcal{L}' \sin \mathcal{L}'' \sin (\mathcal{A}'' - \mathcal{A}') = \mathrm{A},$$
$$\sin \mathcal{L}'' \sin \mathcal{L} \sin (\mathcal{A} - \mathcal{A}'') = \mathrm{B},$$
$$\sin \mathcal{L} \sin \mathcal{L}' \sin (\mathcal{A}' - \mathcal{A}) = \mathrm{C},$$

$$\sin \mathcal{L} (\cos \mathcal{L}' - \cos \mathcal{L}'') = \alpha,$$
$$\sin \mathcal{L}' (\cos \mathcal{L}'' - \cos \mathcal{L}) = \beta,$$
$$\sin \mathcal{L}'' (\cos \mathcal{L} - \cos \mathcal{L}') = \gamma,$$

On a

$$x = + \frac{A + B + C}{A \cos \mathfrak{L} + B \cos \mathfrak{L}' + C \cos \mathfrak{L}''},$$
$$y = + \frac{\alpha \sin \mathcal{A} + \beta \sin \mathcal{A}' + \gamma \sin \mathcal{A}''}{A \cos \mathfrak{L} + B \cos \mathfrak{L}' + C \cos \mathfrak{L}''},$$
$$z = - \frac{\alpha \cos \mathcal{A} + \beta \cos \mathcal{A}' + \gamma \cos \mathcal{A}''}{A \cos \mathfrak{L} + B \cos \mathfrak{L}' + C \cos \mathfrak{L}''},$$

Dans le calcul pratique, il convient de poser

$$A + B + C = L, \quad \text{d'où} \quad x = + \frac{L}{P},$$
$$\alpha \sin \mathcal{A} + \beta \sin \mathcal{A}' + \gamma \sin \mathcal{A}'' = M, \qquad y = + \frac{M}{P},$$
$$\alpha \cos \mathcal{A} + \beta \cos \mathcal{A}' + \gamma \cos \mathcal{A}'' = -N,$$
$$A \cos \mathfrak{L} + B \cos \mathfrak{L}' + C \cos \mathfrak{L}'' = P. \qquad z = + \frac{N}{P},$$

et les inconnues a, p, ρ seront données par les formules très simples

$$\operatorname{tg} a = + \frac{N}{M},$$
$$\operatorname{tg} p = \pm \frac{\sqrt{M^2 + N^2}}{L},$$
$$\cos \rho = \pm \frac{P}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}.$$

Corollaire.

A quelle heure sidérale θ *trois étoiles données* E $(\mathcal{A}, \mathfrak{L})$, E' $(\mathcal{A}', \mathfrak{L}')$, E'' $(\mathcal{A}'', \mathfrak{L}'')$ *sont-elles vues, d'un lieu de colatitude* φ, *sous la même distance zénithale ?*

Solution : Le problème n'est possible que si l'un des pôles A', A'' du petit cercle déterminé, sur la sphère céleste, par les trois étoiles, passe au zénith du lieu, c'est-à-dire que si, φ étant compté de 0 à 180° du pôle nord au pôle sud de la sphère, on a

$$(1) \qquad \operatorname{tg}^2 \varphi = \operatorname{tg}^2 p = \frac{y^2 + z^2}{x^2},$$

relation où p, x, y, z ont le même sens que dans l'exercice précédent.

Suivant que l'on aura

$$\varphi = p' \quad \text{ou} \quad \varphi = p'',$$

l'heure sidérale cherchée sera

$$\theta = a' \quad \text{ou} \quad \theta = a'',$$

a', a'' se calculant comme il vient d'être dit.

82ᵉ Exercice.

On a mesuré les distances angulaires δ', δ'', δ''', ... *d'une étoile inconnue* E $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ *aux étoiles connues* E' $(\mathcal{A}', \mathcal{D}')$, E'' $(\mathcal{A}'', \mathcal{D}'')$, E''' $(\mathcal{A}''', \mathcal{D}''')$, ... *Calculer les coordonnées équatoriales* $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ *de la première.*

Solution : 1° Les divers triangles formés par le pôle P de la sphère céleste *(fig. 54)*, l'étoile inconnue E et chacune des étoiles données E', E'', E''', ... donnent immédiatement les relations

$$\begin{aligned}
\cos\delta' &= \cos\mathcal{D}\cos\mathcal{D}' + \sin\mathcal{D}\sin\mathcal{D}'\cos(\mathcal{A}' - \mathcal{A}),\\
\cos\delta'' &= \cos\mathcal{D}\cos\mathcal{D}'' + \sin\mathcal{D}\sin\mathcal{D}''\cos(\mathcal{A}'' - \mathcal{A}),\\
\cos\delta''' &= \cos\mathcal{D}\cos\mathcal{D}''' + \sin\mathcal{D}\sin\mathcal{D}'''\cos(\mathcal{A}''' - \mathcal{A}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

ou bien

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\cos\delta' &= x\cos\mathcal{D}' + y\sin\mathcal{D}'\cos\mathcal{A}' + z\sin\mathcal{D}'\sin\mathcal{A}',\\
\cos\delta'' &= x\cos\mathcal{D}'' + y\sin\mathcal{D}''\cos\mathcal{A}'' + z\sin\mathcal{D}''\sin\mathcal{A}'',\\
\cos\delta''' &= x\cos\mathcal{D}''' + y\sin\mathcal{D}'''\cos\mathcal{A}''' + z\sin\mathcal{D}'''\sin\mathcal{A}'''.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

en posant

$$(2)\qquad x = \cos\mathcal{D}, \qquad y = \sin\mathcal{D}\cos\mathcal{A}, \qquad z = \sin\mathcal{D}\sin\mathcal{A}.$$

La résolution du système (1) par la méthode des moindres carrés,

donnera les valeurs les plus probables de x, y, z. On tirera ensuite des équations (2) les formules

$$\cos \mathfrak{L} = x, \quad \cos \mathfrak{M} = y \operatorname{coséc} \mathfrak{L}, \quad \sin \mathfrak{M} = z \operatorname{coséc} \mathfrak{L},$$

qui fourniront une solution unique, car $\mathfrak{L}$ est nécessairement compris entre 0 et π, tandis que $\mathfrak{M}$ est donné à la fois par son sinus et son cosinus.

2° Si le nombre des mesures se réduisait à deux, celui des inconnues $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{L}$, il faudrait, aux deux équations (1) correspondantes, joindre la relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \tag{3}$$

qui résulte des égalités (2). La détermination de x, y, z serait alors ramenée à une équation du second degré qui conduirait, pour ces inconnues, à deux systèmes de valeurs x', y', z' et x'', y'', z''.

Désignons par d la distance angulaire de E′ et E″, aisément calculable par la formule

$$\cos d = \cos \mathfrak{L}' \cos \mathfrak{L}'' + \sin \mathfrak{L}' \sin \mathfrak{L}'' \cos (\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}'').$$

Si l'un quelconque des trois arcs d, δ', δ'' est plus petit que la somme des deux autres, les arcs décrits de E′, E″ comme pôles, respectivement avec δ', δ'' se couperont en deux points E_1, E_2 répondant à la question. Les deux systèmes x', y', z', x'', y'' z'' seront réels. A chacun d'eux répondra une solution unique donnée par les équations (2) : E_1 ($\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{L}_1$) répondant à x', y', z'; E_2 ($\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{L}_2$) répondant à x'', y'', z''.

Pour choisir, entre E_1 et E_2, la vraie position de E, l'observateur a dû remarquer si l'étoile inconnue est au-dessus ou au-dessous de l'arc E′ E″ par rapport au pôle ou à l'horizon.

Faute de cette remarque ou de tout autre équivalente, jointe aux mesures, l'incertitude du choix est complète.

3° Si l'observateur a pris seulement trois distances angulaires, toute incertitude disparaît et le problème s'abaisse du second au premier degré; alors les inconnues ($\mathfrak{M}$, $\mathfrak{L}$) sont données par les expressions suivantes obtenues en résolvant (1) par les formules de

Cramer :

$$\sin \mathfrak{L}''' \sin \mathfrak{L}'' \sin (\mathcal{A}''' - \mathcal{A}'') = \text{A},$$
$$\sin \mathfrak{L}' \sin \mathfrak{L}''' \sin (\mathcal{A}' - \mathcal{A}''') = \text{B},$$
$$\sin \mathfrak{L}'' \sin \mathfrak{L}' \sin (\mathcal{A}'' - \mathcal{A}') = \text{C}.$$

$$\sin \mathfrak{L}' (\cos \delta''' \cos \mathfrak{L}'' - \cos \delta'' \cos \mathfrak{L}''') = \alpha,$$
$$\sin \mathfrak{L}'' (\cos \delta' \cos \mathfrak{L}''' - \cos \delta''' \cos \mathfrak{L}') = \beta,$$
$$\sin \mathfrak{L}''' (\cos \delta'' \cos \mathfrak{L}' - \cos \delta' \cos \mathfrak{L}'') = \gamma.$$

$$x = + \frac{\text{A} \cos \delta' + \text{B} \cos \delta'' + \text{C} \cos \delta'''}{\text{A} \cos \mathfrak{L}' + \text{B} \cos \mathfrak{L}'' + \text{C} \cos \mathfrak{L}'''}; \quad \text{A} \cos \delta' + \text{B} \cos \delta'' + \text{C} \cos \delta''' = \text{L},$$

$$y = + \frac{\alpha \sin \mathcal{A}' + \beta \sin \mathcal{A}'' + \gamma \sin \mathcal{A}'''}{\text{A} \cos \mathfrak{L}' + \text{B} \cos \mathfrak{L}'' + \text{C} \cos \mathfrak{L}'''}; \quad \alpha \sin \mathcal{A}' + \beta \sin \mathcal{A}'' + \gamma \sin \mathcal{A}''' = \text{M},$$

$$z = - \frac{\alpha \cos \mathcal{A}' + \beta \cos \mathcal{A}'' + \gamma \cos \mathcal{A}'''}{\text{A} \cos \mathfrak{L}' + \text{B} \cos \mathfrak{L}'' + \text{C} \cos \mathfrak{L}'''}; \quad \alpha \cos \mathcal{A}' + \beta \cos \mathcal{A}'' + \gamma \cos \mathcal{A}''' = -\text{N}.$$

$$\text{tg} \mathcal{A} = + \frac{\text{N}}{\text{M}},$$

$$\text{tg} \mathfrak{L} = \pm \frac{\sqrt{\text{M}^2 + \text{N}^2}}{\text{L}},$$

83ᵉ Exercice.

Calculer les coordonnées géographiques d'un lieu où l'on a mesuré simultanément les distances zénithales z, z', z'' *de trois étoiles connues* E ($\mathcal{A}$, $\mathfrak{L}$), E' ($\mathcal{A}'$, $\mathfrak{L}'$), E'' ($\mathcal{A}''$, $\mathfrak{L}''$), *à une époque sidérale* θ *du premier méridien.*

Solution : Soient a, p l'ascension droite et la distance polaire, à l'époque θ, du zénith du lieu. La longitude $\mathfrak{L}$ et la colatitude φ de ce lieu seront :

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathfrak{L} = \theta - a, \\ \varphi = p. \end{cases}$$

Calcul de a, p. — Les triangles PZE, PZE', PZE'' donnent les trois relations

$$(2) \qquad \begin{cases} \cos z = \cos p \cos \mathfrak{L} + \sin p \sin \mathfrak{L} \cos (\alpha - \mathcal{A}), \\ \cos z' = \cos p \cos \mathfrak{L}' + \sin p \sin \mathfrak{L}' \cos (\alpha - \mathcal{A}'), \\ \cos z'' = \cos p \cos \mathfrak{L}'' + \sin p \sin \mathfrak{L}'' \cos (\alpha - \mathcal{A}''), \end{cases}$$

qui, en posant

$$(3)\qquad \begin{cases} x = \cos p, \\ y = \sin p \cos a, \\ z = \sin p \sin a, \end{cases}$$

deviennent :

$$(4)\qquad \begin{cases} \cos z = x \cos \mathfrak{L} + y \sin \mathfrak{L} \cos \mathcal{A} + z \sin \mathfrak{L} \sin \mathcal{A}, \\ \cos z' = x \cos \mathfrak{L}' + y \sin \mathfrak{L}' \cos \mathcal{A}' + z \sin \mathfrak{L}' \sin \mathcal{A}', \\ \cos z'' = x \cos \mathfrak{L}'' + y \sin \mathfrak{L}'' \cos \mathcal{A}'' + z \sin \mathfrak{L}'' \sin \mathcal{A}''. \end{cases}$$

Résolvons-les par les formules de Cramer et posons

$$(5)\qquad \begin{cases} \sin \mathfrak{L}'' \sin \mathfrak{L}' \sin (\mathcal{A}'' - \mathcal{A}') = \mathrm{A}, \\ \sin \mathfrak{L} \sin \mathfrak{L}'' \sin (\mathcal{A} - \mathcal{A}'') = \mathrm{B}, \\ \sin \mathfrak{L}' \sin \mathfrak{L} \sin (\mathcal{A}' - \mathcal{A}) = \mathrm{C}. \\ \sin \mathfrak{L} (\cos z'' \cos \mathfrak{L}' - \cos z' \cos \mathfrak{L}'') = \alpha, \\ \sin \mathfrak{L}' (\cos z \cos \mathfrak{L}'' - \cos z'' \cos \mathfrak{L}) = \beta, \\ \sin \mathfrak{L}'' (\cos z' \cos \mathfrak{L} - \cos z \cos \mathfrak{L}') = \gamma. \end{cases}$$

On aura

$$(6)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{\mathrm{A} \cos z + \mathrm{B} \cos z' + \mathrm{C} \cos z''}{\mathrm{A} \cos \mathfrak{L} + \mathrm{B} \cos \mathfrak{L}' + \mathrm{C} \cos \mathfrak{L}''}, \\ y = \dfrac{\alpha \sin \mathcal{A} + \beta \sin \mathcal{A}' + \gamma \sin \mathcal{A}''}{\mathrm{A} \cos \mathfrak{L} + \mathrm{B} \cos \mathfrak{L}' + \mathrm{C} \cos \mathfrak{L}''}, \\ z = -\dfrac{\alpha \cos \mathcal{A} + \beta \cos \mathcal{A}' + \gamma \cos \mathcal{A}''}{\mathrm{A} \cos \mathfrak{L} + \mathrm{B} \cos \mathfrak{L}' + \mathrm{C} \cos \mathfrak{L}''}, \end{cases}$$

puis

$$(7)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg} a = \dfrac{z}{y}, \\ \operatorname{tg} p = \dfrac{y}{x \cos a} = \dfrac{z}{x \sin a}, \end{cases}$$

donneront a et p, déterminés sans ambiguïté puisque les signes de $\operatorname{tg} p$, $\cos p$ et $\sin a$, $\cos a$ sont connus par (3), (6), (7).

84ᵉ Exercice.

En un certain lieu, on a observé les époques T′, T″, T‴, ... *d'un chronomètre de marche constante m, aux moments du passage*

par une même hauteur d'une série d'étoiles connues $E'(\mathcal{A}', \mathcal{D}')$, $E''(\mathcal{A}'', \mathcal{D}'')$, $E'''(\mathcal{A}''', \mathcal{D}''')$, ...

On demande la colatitude φ *du lieu, la correction* r *du chronomètre et la distance zénithale commune* z *observée pour les étoiles.*

Solution : Désignons par t', t'', t''', ... les angles horaires des diverses étoiles aux moments de leurs passages respectifs par la distance zénithale z; par r la correction du chronomètre à une époque ronde T choisie vers le milieu de la série. Nous avons :

$$\begin{array}{ll} t' = T' + r' - \mathcal{A}', & r' = r + m(T' - T), \\ t'' = T'' + r'' - \mathcal{A}'', & r'' = r + m(T'' - T), \\ t''' = T''' + r''' - \mathcal{A}''', & r''' = r + m(T''' - T), \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

et, par suite, si nous posons :

$$\alpha' = (m+1)(T' - T) - \mathcal{A}', \quad \alpha'' = (m+1)(T'' - T) - \mathcal{A}'', \ldots,$$

$$(1) \qquad t = T + r,$$

nous pouvons écrire

$$t' = t + \alpha', \quad t'' = t + \alpha'', \quad t''' = t + \alpha''',$$

et les équations

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \cos z = \cos \mathcal{D}' \cos \varphi + \sin \mathcal{D}' \sin \varphi \cos t', \\ \cos z = \cos \mathcal{D}'' \cos \varphi + \sin \mathcal{D}'' \sin \varphi \cos t'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

c'est-à-dire

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 1 = X \cos \mathcal{D}' + Y \sin \mathcal{D}' \cos \alpha' - Z \sin \mathcal{D}' \sin \alpha', \\ 1 = X \cos \mathcal{D}'' + Y \sin \mathcal{D}'' \cos \alpha'' - Z \sin \mathcal{D}'' \sin \alpha'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

en posant

$$(4) \quad X = \cos \varphi \operatorname{séc} z, \quad Y = \sin \varphi \cos t \operatorname{séc} z, \quad Z = \sin \varphi \sin t \operatorname{séc} z,$$

étant résolues, par rapport à X, Y, Z par la méthode de Cauchy ou

celle des moindres carrés; nous calculerons t, φ, z par les formules

$$
(5)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\operatorname{tg} t &= \frac{Z}{Y},\\
\operatorname{tg} \varphi &= \frac{Y}{X \cos t} = \frac{Z}{X \sin t},\\
\cos z &= \frac{\cos \varphi}{X} = \frac{\sin \varphi \cos t}{Y} = \frac{\sin \varphi \sin t}{Z}.
\end{aligned}
\right.
$$

La formule (1) donnera r

$$
(6)\qquad r = t - T.
$$

REMARQUE.

L'observateur n'a pas besoin de cercle divisé. Il lui suffit d'un chronomètre et d'une lunette montée altazimutalement pour se livrer au présent exercice. Il lui suffirait même d'une lunette pouvant simplement tourner autour d'un axe vertical avec lequel elle ferait un angle fixe compris entre 0° et 90°.

85e Exercice.

En un certain lieu, on a observé les époques T', T'', T''', ... *d'un chronomètre de marche constante* m, *aux moments du passage par un même azimut d'une série d'étoiles connues* $E'(\mathcal{A}', \mathcal{D}')$, $E''(\mathcal{A}'', \mathcal{D}'')$, $E'''(\mathcal{A}''', \mathcal{D}''')$, ...

On connaît l'une quelconque des trois quantités : la colatitude φ *du lieu, la correction* r *de la pendule, l'azimut commun* a; *on demande les deux autres.*

Solution : Adoptons les notations de l'exercice précédent. Nous aurons

$$
(1)\qquad t = T + r
$$

$$
(2)\qquad \cot \mathcal{D}' \sin \varphi = \cos \varphi \cos t' - \sin t' \cot a,
$$

$$
(3)\qquad \cot \mathcal{D}'' \sin \varphi = \cos \varphi \cos t'' - \sin t'' \cot a,
$$

. . . .

Mais en remplaçant t', t'', ... par $t + \alpha'$, $t + \alpha''$, ... les équations (2), (3) peuvent s'écrire

$$\cot \mathfrak{L}' \sin\varphi = (\cos\varphi \cos t - \sin t \cot a)\cos\alpha' - (\cos\varphi \sin t + \cos t \cot a)\sin\alpha',$$
$$\cot \mathfrak{L}'' \sin\varphi = (\cos\varphi \cos t - \sin t \cot a)\cos\alpha'' - (\cos\varphi \sin t + \cos t \cot a)\sin\alpha'',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ou bien

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \cot \mathfrak{L}' = X \cos\alpha' - Y \sin\alpha', \\ \cot \mathfrak{L}'' = X \cos\alpha'' - Y \sin\alpha'', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \right.$$

en posant

$$(5) \quad X = \frac{\cos\varphi \cos t - \sin t \cot a,}{\sin\varphi} \qquad Y = \frac{\cos\varphi \sin t + \cos t \cot a}{\sin\varphi}.$$

On aura, pour déterminer X, Y par la méthode de Cauchy ou celle des moindres carrés, autant d'équations (4) que de passages. Les équations (5), mises sous la forme

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \cot\varphi = X \cos t + Y \sin t, \\ \operatorname{coséc}^2\varphi = (X^2 + Y^2 + 1)\sin^2 a, \end{array} \right.$$

donneront immédiatement deux des quantités φ, a, t lorsque la troisième sera connue; et, par suite, en tenant compte de l'équation (1), deux des quantités φ, a, r lorsque la troisième est donnée.

REMARQUE.

Pour se livrer au présent exercice, l'observateur n'a besoin que d'une lunette montée altazimutalement, sans aucun cercle divisé, et d'un chronomètre sidéral. Il lui suffirait même d'une lunette pouvant simplement tourner autour d'un axe horizontal fixé en azimut.

86e Exercice.

Quel est lieu géométrique des points de la sphère céleste, c'est-à-dire des étoiles, qui se couchent ou se lèvent simultanément; plus généralement, qui ont une hauteur commune donnée, à une époque donnée, en un lieu donné.

Solution : Il nous suffira d'indiquer la solution sans en développer les formules. Le lieu est évidemment le cercle décrit du zénith du lieu, comme pôle, à l'heure donnée, avec une ouverture de compas égale au complément de la hauteur commune donnée.

REMARQUE GÉNÉRALE.

Il arrive assez souvent que pour déterminer quelques angles inconnus d'un problème, soit, pour simplifier, deux angles seulement φ, t, on a un certain nombre d'équations qu'on peut réduire au premier degré :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} ax + by + cz + \ldots + fu + gv \ldots = m, \\ a'x + b'y + c'z + \ldots + f'u + g'v \ldots = m', \\ a''x + b''y + c''z + \ldots + f''u + g''v \ldots = m'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

en posant, par exemple,

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi\cos t, \quad z = \sin\varphi\sin t, \\ \qquad u = \cos^2\varphi, \quad \ldots \quad v = \sin^2\varphi, \end{array}\right.$$

les quantités $a, b, c, \ldots, f, g, \ldots, m, a', b', c', \ldots, f', g', \ldots, m', \ldots$ étant connues, soit par la théorie, soit par l'observation.

Les inconnues $x, y, z, \ldots, u, v, \ldots$ ne sont pas alors indépendantes. Elles sont liées par certaines conditions (3) résultant de l'élimination de φ, t entre les définitions (2), telles que

$$(3)\quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad u^2 + v^2 = 1, \quad x^2 = u^2, \quad \ldots$$

1° Si le nombre des équations (1) est strictement égal à celui des inconnues φ, t, c'est-à-dire à 2 dans notre hypothèse, et inférieur à celui des inconnues auxiliaires $x, y, z, u, \ldots$, il faut les résoudre directement par rapport à φ, t, ce qui peut conduire en général à une équation A d'un degré supérieur au 1er.

2° Mais si le nombre des équations (1) est égal ou supérieur à celui des inconnues auxiliaires $x, y, z, \ldots, u, v, \ldots$; il faut calculer celles-ci par la méthode des moindres carrés, ce qui n'est qu'un problème du 1er degré; s'assurer que les valeurs obtenues ainsi pour $x, y, z, \ldots, u, v, \ldots$, satisfont aux conditions (3); enfin tirer φ et t des deux équations (2) les plus commodes.

En effet, à toute solution du problème astronomique, répond, par hypothèse, une solution x, y, z, ... de (1) satisfaisant à (3), et réciproquement, toute solution x, y, z, ... de (1) vérifiant (3) donne pour φ et t une solution astronomique.

En général le système (1) n'aura qu'une solution x, y, z à laquelle pourront répondre un ou plusieurs systèmes de valeurs de φ, t.

On pourra ramener le 1er cas au 2e, s'il est permis, par des observations nouvelles, d'augmenter le nombre des équations (1) distinctes. On abaissera ainsi le problème jusqu'au premier degré, en écartant les solutions de l'équation A étrangères à la question astronomique.

En multipliant ainsi le nombre des équations (1) il est clair qu'il faudra éviter de se placer, pour les observations fournissant des équations nouvelles, dans des conditions si particulièrement liées à celles des équations primitives, que le système (1) reste indéterminé par rapport à x, y, z, ... auquel cas il faudrait revenir à la détermination directe de φ, t. Il suffira que les époques d'observation, les coordonnées des étoiles observées, etc..., soient, pour les équations additionnelles, indépendantes des mêmes quantités pour les équations primitives.

Si le problème astronomique admet une solution, on ne pourra jamais d'ailleurs rendre le système (1) incompatible par l'adjonction d'équations *nouvelles du problème,* c'est-à-dire d'équations admettant cette solution.

CHAPITRE IV

Lieux terrestres définis par des conditions astronomiques.

87e Exercice.

Quels sont les lieux de la terre pour lesquels une étoile de déclinaison $\mathfrak{D}$ se lève ou se couche en même temps que pour un lieu donné?

Solution : Soient :

$\mathfrak{L}_0$, φ_0 la longitude et la latitude du lieu donné Z;
$\mathfrak{L}$, φ — d'un lieu cherché quelconque A.

Lorsque l'étoile se couche pour le lieu Z, son angle horaire t_0 est donné par la formule générale

$$\text{(1)} \qquad \cos z = \sin \varphi \sin \mathfrak{D} + \cos \varphi \cos \mathfrak{D} \cos t,$$

dans laquelle il faut faire $z = 90°$, $\varphi = \varphi_0$, $t = t_0$. Au même moment l'angle horaire de cette étoile pour le lieu A est $t_0 + \mathfrak{L}$, si on compte les longitudes positivement vers l'est et à partir du méridien de Z. Les coordonnées $\mathfrak{L}$, φ de A sont donc liées par la relation (1) dans laquelle on a fait préalablement $z = 90°$, $t = t_0 + \mathfrak{L}$, c'est-à-dire par l'équation

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{tg} \varphi . \operatorname{tg} \mathfrak{D} + \cos (\mathfrak{L} + t_0) = 0,$$

qui représente le grand cercle ZAZ' *(fig. 55)* ayant pour pôle le point E où la terre est coupée par la direction allant de son centre à l'étoile au moment où celle-ci se couche pour Z.

On peut d'ailleurs vérifier cette équation par le triangle PAE dans lequel

$$PA = 90^\circ - \varphi, \quad PE = 90^\circ - \mathfrak{D}, \quad AE = 90^\circ,$$
$$APE = t = ZPE - ZPA = t_0 + \mathfrak{L},$$

et qui donne immédiatement

$$0 = \sin\varphi \sin\mathfrak{D} + \cos\varphi \cos\mathfrak{D} \cos(t_0 + \mathfrak{L}).$$

Pour tous les lieux situés sur le demi-cercle $mZ'm'$ l'étoile E se lève; elle se couche pour tous ceux qui sont situés sur le demi-cercle opposé mZm'; elle rase l'horizon pour les lieux m et m'.

88e Exercice.

A quel moment sidéral θ *du 1er méridien* A, *voit-on, de deux points donnés* $A'(\mathfrak{L}', \varphi')$, $A''(\mathfrak{L}'', \varphi'')$ *de la terre, une étoile désignée* $E(\mathcal{A}, \mathfrak{D})$:

1° Sous la même distance zénithale z;

2° Sous le même azimut a.

Calculer z *et* a.

Solution : Prenons pour sphère céleste la sphère terrestre elle-même, et soient à l'époque θ :

θ', θ'' les heures sidérales locales en A', A'';
t', t'' les angles horaires de E en A', A''.

On a d'abord les relations évidentes

$$(1) \quad \theta' = t' + \mathcal{A}, \quad \theta'' = t'' + \mathcal{A}, \quad \theta = \theta' + \mathfrak{L}' = \theta'' + \mathfrak{L}'',$$

en comptant les longitudes $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{L}''$ dans le même sens que les angles horaires et de 0° à 360°.

Les triangles sphériques PA'E, PA''E *(fig. 56)* donnent ensuite

$$(2) \qquad \cos z = \cos\mathfrak{D} \cos\varphi' + \sin\mathfrak{D} \sin\varphi' \cos t',$$
$$(3) \qquad \cos z = \cos\mathfrak{D} \cos\varphi'' + \sin\mathfrak{D} \sin\varphi'' \cos t'',$$

Si nous posons

(4) $\varphi'' + \varphi' = 2s, \qquad \varphi'' - \varphi' = 2d,$

(5) $t'' + t' = 2\tau, \qquad t'' - t' = \mathfrak{L}' - \mathfrak{L}'' = 2\delta,$

et si nous éliminons cos z entre (1) et (2), nous avons

(6) $\cos\mathfrak{L}\sin s\sin d - \sin\mathfrak{L}\cos s\sin d.\cos\delta\cos\tau + \sin\mathfrak{L}\sin s\cos d\sin\delta\sin\tau = 0,$

équation qui détermine τ. Après τ on calculera t', t'', par les relations (5); puis θ', θ'', θ par les relations (1); enfin z par l'une ou l'autre des équations (2), (3).

L'équation (6) peut s'écrire

(7) $\cos(\tau + \psi) = \cos\psi \cot\mathfrak{L} \operatorname{tg} s \operatorname{séc}\delta,$

en prenant

(8) $\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\delta.\operatorname{tg} s \cot d.$

La condition de possibilité du problème est

$$\cos^2\psi \cot^2\mathfrak{L} \operatorname{tg}^2 s \operatorname{séc}^2\delta < 1,$$

ou, en substituant à cos ψ sa valeur en fonction de tg ψ ou tg δ tg s cot d et résolvant par rapport à cot² $\mathfrak{L}$,

(9) $\cot^2\mathfrak{L} < \cot^2 s.\cos^2\delta + \cot^2 d \sin^2\delta.$

Géométriquement, cette condition exprime que le parallèle céleste E′E décrit par l'étoile, dans son mouvement diurne, rencontre le grand cercle II′, perpendiculaire à l'arc A′A″ en son milieu I.

Si la condition (9) est remplie, l'équation (7) donne pour τ les deux solutions

$$\tau_1 = -\psi + \alpha, \qquad \tau_2 = -\psi - \alpha,$$

où ψ et α désignent les arcs entre 0 et π, satisfaisant respectivement à (8) et (7). A chaque valeur de τ répond une valeur pour z et θ.

Les deux solutions se réduisent à une seule si les cercles EE′, II′ se touchent ou si l'inégalité (9) se transforme en égalité; elles disparaissent si ces cercles ne se rencontrent pas ou si l'inégalité (9) cesse d'avoir lieu.

2° Les triangles PA′E, PA″E donnent

$$\text{(1)} \qquad \cot \mathfrak{L} \sin \varphi' = \cos \varphi' \cos t' - \sin t' \cot \alpha,$$
$$\text{(2)} \qquad \cot \mathfrak{L} \sin \varphi'' = \cos \varphi'' \cos t'' - \sin t'' \cot \alpha,$$

et, après l'élimination de cot α,

$$\text{(3)} \quad \cot \mathfrak{L}(\sin \varphi' \sin t'' - \sin \varphi'' \sin t') = \cos \varphi' \cos t' \sin t'' - \cos \varphi'' \cos t'' \sin t',$$

ou, en introduisant les quantités s, d, δ, τ précédemment définies,

$$\text{(4)} \quad \begin{cases} 2 \cot \mathfrak{L} (\sin s \cos d \sin \delta \cos \tau - \cos s \sin d \cos \delta \sin \tau) \\ \qquad = \cos s \cos d \sin 2\delta + \sin s \sin d \sin 2\tau. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$x = \cos \tau, \qquad y = \sin \tau,$$

x et y seront donnés par l'intersection du cercle

$$\text{(5)} \qquad x^2 + y^2 = 1$$

et de l'hyperbole

$$\text{(6)} \quad xy \operatorname{tg} \mathfrak{L} - x \sin \delta \operatorname{cotg} d + y \cos \delta \operatorname{cotg} s + \tfrac{1}{2} \sin 2\delta \operatorname{cotg} s \operatorname{cotg} d \operatorname{tg} \mathfrak{L} = 0.$$

La question est donc ramenée à la résolution d'une équation du 4e degré.

REMARQUES.

I. — Si l'on cherchait le lieu des points x, y, z de la sphère céleste vus de A′, A″ sous le même azimut, on poserait

$$\text{(7)} \qquad x = \sin \mathfrak{L} \cos \tau, \qquad y = \sin \mathfrak{L} \sin \tau, \qquad z = \cos \mathfrak{L}.$$

L'équation (4) deviendrait alors

$$\text{(8)} \quad \sin 2\delta (x^2 + y^2) + 2xy \operatorname{tg} s \operatorname{tg} d - 2xz \sin \delta \operatorname{tg} s + 2yz \cos \delta \operatorname{tg} d = 0.$$

Le lieu cherché est à l'intersection de la sphère céleste

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

et du cône (8) dont le sommet est au centre de cette sphère.

L'intersection du parallèle céleste $z = \cos \mathfrak{D}$ avec le cône (8) donne la solution demandée.

II. — Cet exercice double ne diffère pas au fond des exercices 63e et 64e dont les deux étoiles sont remplacées par deux lieux terrestres et le lieu terrestre par une étoile.

89e Exercice.

Sous quels azimuts a ou a', et quelles distances zénithales z ou z', une étoile donnée E $(\mathcal{A}, \mathfrak{D})$ *est-elle vue au même moment par les divers habitants d'un méridien ou du méridien opposé?*

Solution : Soient *(fig. 57) :*

P, P' les pôles nord et sud de la sphère céleste O que nous supposons coïncider avec la sphère terrestre;
PmP', Pm'P' deux méridiens opposés;
$\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$ leurs longitudes, comptées de 0° à 360° et de l'est à l'ouest à partir du premier méridien;
t, t' les angles horaires de l'étoile E, respectifs à ces méridiens opposés, au même moment;
θ l'heure sidérale du premier méridien à ce moment.

En un lieu m, de colatitude φ, comptée de 0° à 180° en allant de P vers P', pour un habitant du méridien PmP', on aura les formules

$$t = \theta - \mathfrak{L} - \mathcal{A}, \tag{1}$$

$$\cos z = \cos \mathfrak{D} \cos \varphi + \sin \mathfrak{D} \sin \varphi \cos t, \tag{2}$$

$$\cot \mathfrak{D} \sin \varphi = \cos \varphi \cos t - \sin t \cot a, \tag{3}$$

qui résultent immédiatement, la première de définitions posées, les deux autres de la considération du triangle sphérique PEm et qui donnent indépendamment l'une de l'autre soit la constante t, soit les deux fonctions a, z de la variable φ.

z est compté de m vers E de 0° à 180°.

a est compté positivement de 0° à 360°, à partir de la direction sud mP' jusqu'à la direction mE, de gauche à droite, pour un personnage fictif ayant les pieds en O et la tête en m.

En un lieu m' de colatitude φ', sur le méridien opposé, on aura de même

$$t' = 0 - \mathcal{L}' - \mathcal{A}, \tag{4}$$

$$\cos z' = \cos \mathcal{P} \cos \varphi' + \sin \mathcal{P} \sin \varphi' \cos t', \tag{5}$$

$$\cot \mathcal{P} \sin \varphi' = \cos \varphi' \cos t' - \sin t' \cot a'. \tag{6}$$

Mais toujours, à une circonférence près,

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \pi, \quad t' = t + \pi,$$

et l'un des deux angles t, t', soit t, est nécessairement inférieur à π.

Les méridiens PmP' et $Pm'P'$ sont ainsi respectivement à l'est et à l'ouest de l'étoile E; nous les appellerons *méridien oriental* et *méridien occidental*.

MÉRIDIEN ORIENTAL : $t < \pi$.

La différentiation des formules (2), (3), après quelques réductions faciles, ou, plus simplement, l'application des formules différentielles connues (la 1re du 3e type et la 3e du 1er type de notre tableau B, page 13 du COURS), au triangle PEM, en faisant dans ces formules

$$a = \mathcal{P}, \quad b = \varphi, \quad c = z, \quad A = \pi - a, \quad C = t,$$
$$\delta a = 0, \quad \delta b = \delta\varphi, \quad \delta c = \delta z, \quad \delta A = - \delta a, \quad \delta C = 0,$$

conduisent également aux relations

$$da = \sin a \cot z . d\varphi = \sin^2 a . \text{coséc}\, \mathcal{P}\, \text{coséc}\, t . \cos z . d\varphi,$$
$$dz = - \cos a . d\varphi.$$

Le facteur coséc $\mathcal{P}$ coséc t ou son inverse $\sin \mathcal{P} \sin t$ étant toujours positif, on voit que les signes de da et dz seront toujours respectivement ceux de $\cos z$ et $- \cos a$ et ne changeront que pour les valeurs de φ qui annulent ces deux cosinus.

Or, la relation usuelle

$$\sin z \sin a = \sin \mathcal{P} \sin t, \tag{7}$$

qui nous a déjà servi tacitement à passer de l'une à l'autre des deux

formes de da, jointe aux équations (2), (3) montre que $\cos z = 0$, $z = \frac{\pi}{2}$ pour la seule valeur φ_e de φ définie par

(8) $$\operatorname{tg} \varphi_e = -\cot \mathfrak{L} \operatorname{séc} t,$$

répondant au point e où la valeur a_e de a est donnée par

(9) $$\sin a_e = \sin \mathfrak{L} \sin t;$$

et que $\cos a = 0$, $a = \frac{\pi}{2}$ pour la seule valeur de φ_q de φ définie par

(10) $$\operatorname{tg} \varphi_q = \operatorname{tg} \mathfrak{L} \cos t = -\cot \varphi_e,$$

répondant au point q où la valeur z_q de z est donnée par

(11) $$\sin z_q = \sin \mathfrak{L} \sin t.$$

On a donc

$$\varphi_e \lesseqgtr \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_q = \varphi_e \pm \frac{\pi}{2}, \quad \text{suivant que} \quad \operatorname{tg} \mathfrak{L} \cos t \lesseqgtr 0,$$

en prenant ensemble les signes supérieurs ou les signes inférieurs. En d'autres termes, les directions Oe, Oq sont rectangulaires et, en parcourant le méridien considéré de P en P', on rencontre e avant ou après q suivant que $\operatorname{tg} \mathfrak{L} \cos t$ est positif ou négatif.

Soit Q le pôle du cercle méridien considéré. Le grand cercle QE coupe ce méridien en q et si nous désignons l'arc Eq par d nous aurons toujours

$$\sin d = \sin \mathfrak{L} \sin t,$$

$$a_q = \frac{\pi}{2}, \quad z_q = d; \quad a_e = d \text{ ou } \pi - d, \quad z_e = \frac{\pi}{2}.$$

L'arc d est d'ailleurs, en même temps que t, plus petit ou plus grand que $\frac{\pi}{2}$ et comme $\sin d$ est inférieur à $\sin t$, on a

$$d \lesseqgtr t \quad \text{si} \quad t \lesseqgtr \frac{\pi}{2},$$

en prenant ensemble les signes d'une même ligne horizontale.

Il est facile maintenant de suivre le tableau des variations de a et z

lorsque φ varie de 0 à π, c'est-à-dire lorsque m marche de P vers P', en remarquant que les valeurs initiales de $\cos z$, $\cos a$, z, a, pour $\varphi = 0$, sont

$$\cos z_0 = \cos \mathfrak{L}, \qquad z_0 = \mathfrak{L},$$
$$\cos a_0 = \cos t, \qquad a_0 = t,$$

et que, par suite, $\cos z$ aura toujours de P en e le signe de $\cos \mathfrak{L}$, de e en P' un signe contraire; tandis que $\cos a$ aura toujours de P en q le signe de $\cos t$, de q en P' un signe contraire.

		$\mathfrak{L} < \frac{\pi}{2}$		$\mathfrak{L} > \frac{\pi}{2}$	
		$t < \frac{\pi}{2}$	$t > \frac{\pi}{2}$	$t < \frac{\pi}{2}$	$t > \frac{\pi}{2}$
$d - t$		$-$	$+$	$-$	$+$
$\operatorname{tg} \mathfrak{L} \cos t$		$+$	$-$	$-$	$+$
$\varphi_q - \varphi_e$		$-$	$+$	$+$	$-$
de P en e	$\cos z$	$+$	$+$	$-$	$-$
	a	croît de t à $\pi - d$ en passant par $\frac{\pi}{2}$ en q	croît de t à d	décroît de t à d	décroît de t à $\pi - d$ en passant par $\frac{\pi}{2}$ en q
de e en P'	$\cos z$	$-$	$-$	$+$	$+$
	a	décroît de $\pi - d$ à $\pi - t$	décroît de d à $\pi - t$ en passant par $\frac{\pi}{2}$ en q	croît de d à $\pi - t$ en passant par $\frac{\pi}{2}$ en q	croît de $\pi - d$ à $\pi - t$
de P en q	$\cos a$	$+$	$-$	$+$	$-$
	z	décroît de $\mathfrak{L}$ à d	croît de $\mathfrak{L}$ à d en passant par $\frac{\pi}{2}$ en e	décroît de $\mathfrak{L}$ à d en passant par $\frac{\pi}{2}$ en e	croît de π à d
de q en P'	$\cos a$	$-$	$+$	$-$	$+$
	z	croît de d à $\pi - \mathfrak{L}$ en passant par $\frac{\pi}{2}$ en e	décroît de d à $\pi - \mathfrak{L}$	croît de d à $\pi - \mathfrak{L}$	décroît de d à $\pi - \mathfrak{L}$ en passant par $\frac{\pi}{2}$ en e

REMARQUES DIVERSES.

1° Menons les cordes PS, P'S du méridien, respectivement parallèles à Oe, Oq et éliminons $\cos t$ entre (2), (10), $\cot \mathfrak{L}$ entre (3), (8),

nous aurons les relations

$$(12) \qquad \cos z = \cos \mathfrak{T} \operatorname{coséc} \varphi_q \cos(\varphi - \varphi_q),$$

$$(13) \qquad \cot a = \operatorname{cotg} t . \operatorname{coséc} \varphi_e \cos(\varphi - \varphi_e),$$

qui montrent que z et a prennent la même valeur en deux points du méridien, symétriques respectivement par rapport à q et e. Dans le premier et le quatrième des cas précédents, z passe deux fois par la même valeur de P en S et a de S en P'. Dans le deuxième et le troisième cas, a passe deux fois par la même valeur de P en S et z de S en P'.

En S l'azimut est le même qu'en P ou P' et la distance zénithale la même qu'en P' ou P dans le premier et le troisième ou le deuxième et le quatrième cas.

2° Le maximum ou le minimum ont toujours lieu en e pour a, en q pour z.

3° Le point e sépare les lieux, pour lesquels l'étoile est au-dessus de l'horizon ou $z < \frac{\pi}{2}$, de ceux pour lesquels elle est au-dessous ou $z > \frac{\pi}{2}$.

MÉRIDIEN OCCIDENTAL : $t' > \pi$.

Après avoir remplacé t' par $t + \pi$, introduit les points e', q' diamétralement opposés à e, q, l'arc d' supplémentaire de d, on pourrait discuter, d'une manière semblable, les formules (5), (6) qui donneraient les variations de a', z' sur le méridien occidental, lorsque φ' varie de 0 à π ou lorsque m' marche de P vers P'.

Mais cette nouvelle discussion directe devient inutile si on remarque que pour deux points antipodes m, m', on a

$$\varphi' = \pi - \varphi, \qquad a' = -a, \qquad z' = \pi - z.$$

Il suffira donc de suivre les variations de a, z avec φ dans chacun des quatre cas précédents, pour suivre en même temps celles de a', z' avec φ'.

90e Exercice.

Trouver, sur un même méridien M *et son antipode* M′, *les lieux qui voient ou ont une même étoile désignée* E ($\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$), *sous le même azimut donné* a, *à la même époque sidérale* θ *de* M.

Solution : 1° Supposons la terre sphérique et prenons-la pour sphère céleste. Soient *(fig. 58)* :

P le pôle nord;
PMP′ le méridien M considéré; PM′P′ son antipode M′;
m sur M ou m' sur M′ un lieu cherché quelconque;
φ la colatitude de ce lieu, comptée de P positivement sur M, négativement sur M′.

A l'époque θ, l'angle horaire t de l'étoile E relatif à M est

$$t = \theta - \mathcal{A},$$

et les triangles sphériques PmE, Pm'E donnent également la relation unique

$$\cot \mathcal{D} \sin \varphi = \cos \varphi \cos t - \sin t \cot a, \tag{1}$$

qui permet de calculer φ, en posant

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \mathcal{D} \cos t, \tag{2}$$
$$x = \varphi - \psi, \tag{3}$$

par la formule

$$\sin x = - \operatorname{tg} t . \cot a . \sin \psi. \tag{4}$$

ψ et x étant les solutions de (2) et (4) comprises respectivement entre 0 et π, $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, on a pour φ les deux valeurs

$$\varphi_1 = \psi + x,$$
$$\varphi_2 = 180° + \psi - x,$$

lorsque la condition de réalité de x, savoir :

$$\operatorname{tg}^2 t . \cot^2 a . \sin^2 \psi \leq 1,$$

est remplie. Comme

$$\sin^2 \psi = \frac{\operatorname{tg}^2 \psi}{1 + \operatorname{tg}^2 \psi} = \frac{\operatorname{tg}^2 \mathcal{D} \cos^2 t}{1 + \operatorname{tg}^2 \mathcal{D} \cos^2 t},$$

cette condition peut s'écrire

$$\text{(5)} \qquad \sin^2 t \leq \sin^2 a \operatorname{coséc}^2 \mathfrak{L}.$$

Les valeurs φ_1, φ_2 de φ étant portées, chacune suivant son signe, à partir de P, sur le grand cercle PMP'M' dans le sens M ou dans le sens M', on aura les deux solutions du problème qui se réduisent à une lorsque la condition (5) devient une égalité et qui disparaissent avec cette condition.

Les *points solutions* peuvent être situés tous deux soit sur M, soit sur M', ou bien l'un m sur M et l'autre m' sur M', ce qui est le cas de la figure. Soit μ l'un quelconque de ces deux points.

Suivant que a et t seront ou non de même signe, on ira de μ à E, sous l'azimut a, par un arc de grand cercle inférieur ou supérieur à 180°, si μ est sur M; par un arc supérieur ou inférieur à 180°, si μ est sur M'.

La distance zénithale z de μ à E, toujours inférieure à 180°, est donnée dans tous les cas par la formule

$$\text{(6)} \qquad \sin z = \sin t \sin \mathfrak{L} \operatorname{coséc} a,$$

qui résulte immédiatement de l'un ou l'autre des triangles PmE, Pm'E et fournit les deux solutions supplémentaires

$$z_1 = z, \qquad z_2 = 180° - z,$$

z désignant l'arc positif, plus petit que 90°, qui vérifie (6).

L'étoile E est donc toujours levée pour l'un des points μ et couchée pour l'autre, à moins qu'elle ne soit à la fois dans l'horizon de ces deux points, ce qui exige la condition

$$z_1 = z_2 = z = 90°,$$

ou

$$\text{(7)} \qquad \sin t . \operatorname{coséc} a \sin \mathfrak{L} = 1,$$

et il est facile de voir que l'ensemble des conditions (6), (7) équivaut à celles-ci :

$$a = t = \mathfrak{L} = 90°,$$

c'est-à-dire à ce que l'étoile E soit au pôle p de M et M'.

Dans ce cas singulier, ψ et φ sont indéterminés. Tout point de M ou M' est une solution.

2° Il est facile de construire géométriquement les solutions précédentes. L'angle ψ n'est autre chose que la projection sphérique Pq de PE sur M, obtenue en menant par E le grand cercle $q'pq$ perpendiculaire à M et M'. Les points q, q' sont d'ailleurs les solutions du problème dans le cas particulier $a = 90°$.

Si, de p comme pôle, nous décrivons un petit cercle s avec $(90° - a)$ pour rayon pu et si nous menons par E les deux grands cercles S, S' tangents à s, ces cercles coupent le grand cercle PMP'M' en quatre points m, n, m', n' dont deux seulement m, m' répondent à la question.

Les deux azimuts, pour aller de chacun de ces quatre points sur E, en marchant dans un sens ou dans l'autre sur S et S', sont, en effet,

$$\begin{array}{llll} a \text{ et } & a+\pi \text{ soit pour } m, & \text{soit pour } m', \\ -a \text{ et } & -a-\pi, \quad - & n, \quad - & n'. \end{array}$$

Il est clair que

$$x = -qm = -q'm',$$

et que les deux solutions m, m' sont sur une même parallèle à qq'.

On voit enfin que la condition (5) peut s'écrire

$$\sin^2 \overline{Eq} \leq \sin^2 . \overline{uq},$$

et exprime simplement que E est extérieur à s, condition de l'existence des cercles S, S'.

REMARQUE.

Le problème actuel ne diffère pas de celui-ci :

Trouver sur le méridien M *ou son antipode* M' *de la Terre, supposée sphérique, les points d'où il faut partir sous l'azimut donné* a *pour passer, en décrivant un arc de grand cercle, par un point donné* E *dont les coordonnées géographiques, relatives à* M, *sont* $\mathfrak{L}$ *et* t.

91e Exercice.

Trouver les lieux de la Terre ($\mathfrak{L}$, φ) *qui voient ou ont, sous l'azimut donné* a, *une étoile désignée* E ($\mathcal{A}$, $\mathfrak{D}$), *à l'époque sidérale* θ *du premier méridien.*

Solution : Considérons un méridien quelconque M et son antipode M′ de longitude $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L} + \pi$. L'angle horaire de E relatif à M est

$$t = \theta - \mathcal{A} - \mathfrak{L},$$

en supposant les longitudes $\mathfrak{L}$ comptées, comme t, de 0° à 360°, positivement de l'est à l'ouest.

Connaissant a, t, nous trouverons, sur M et M′, les *lieux solutions*, en appliquant les formules de l'exercice précédent, dont nous conserverons d'ailleurs les notations et poursuivrons le numérotage. En faisant varier $\mathfrak{L}$ ou t, nous aurons toutes les solutions à la surface de la Terre.

Avant d'entrer dans la discussion, remarquons que t n'est pas autre chose que la longitude, comptée de l'ouest à l'est, du méridien M par rapport à celui qui, à l'époque donnée θ, coïncide avec le cercle horaire PE de l'étoile.

La condition de possibilité (5) (EXERCICE 90), nous conduit à trois cas, suivant que $\sin^2 a$ $\text{coséc}^2 \mathfrak{D}$ est inférieur, égal ou supérieur à l'unité.

1er CAS. $\sin^2 a < \sin^2 \mathfrak{D}$.

Si l'on pose

$$\sin^2 \omega = \sin^2 a \ \text{coséc}^2 \mathfrak{D}, \tag{8}$$

la condition de possibilité sera

$$\sin^2 t \leq \sin^2 \omega. \tag{9}$$

Elle exprime que φ sera réel, seulement pour les valeurs de t comprises entre $-\omega$ et $+\omega$ ou entre $(\pi - \omega)$ et $(\pi + \omega)$, ω désignant la solution de (8) comprise entre 0 et $+\frac{\pi}{2}$.

Il suffira d'examiner en détail les variations de φ, lorsque t varie de 0 à $+\omega$; car les formules de l'exercice précédent montrent que :

1° ψ ne change pas et x change seulement de signe lorsque t devient $-t$ ou change uniquement de signe.

2° φ change seulement de signe lorsque t croît de π ; de sorte que les *points solutions* ne changent pas.

D'ailleurs lorsque t croît de 0 à ω, l'angle ψ diminue et, par suite, x augmente.

Comme $\sin^2\omega$ est plus grand que $\sin^2 a$, t passera toujours par les valeurs $-a$, $+a$, $-a+\pi$, $a+\pi$, en variant de $-\omega$ à $+\omega$ et de $-\omega+\pi$ à $\omega+\pi$.

Cela posé, il est facile de suivre l'allure de la courbe des lieux cherchés en dressant le tableau des valeurs principales et des variations simultanées de φ et t.

Si, pour fixer la figure 59, nous supposons $\operatorname{tg}\mathcal{L} > 0$ et $-\frac{\pi}{2} < a < 0$, nous aurons le tableau suivant, dans lequel ψ est toujours positif et $< \mathcal{L}$.

t	x	φ_1	arc	φ_2	arc
$-\omega$	$-90°$	$\psi-90°$		$\psi-90°$	
			... $C_1\alpha P$		... $C_1\alpha' A$
$+a$	$-\psi$	0		$\pi+2\psi$	
			... PbE		... $Ab'E'$
0	0	$\mathcal{L}$		$\pi+\mathcal{L}$	
			... EcA_1		... $E'c'P'$
$-a$	$+\psi$	2ψ		π	
			... $A_1\beta c$		... $P'\beta' C$
$+\omega$	$+90°$	$\psi+90°$		$\psi+90°$	

Ce tableau montre que t variant de $-\omega$ à $+\omega$, le point de la courbe répondant à φ_1 parcourt l'arc $C_1\alpha PbEcA_1\beta C$, tandis que le point répondant à φ_2 parcourt l'arc $C_1\alpha' Ab'E'c'P'\beta' C$. Ces deux arcs se raccordent en C_1 et C où ils sont tangents aux cercles horaires PB_1, PB inclinés respectivement de $-\omega$, $+\omega$ sur le cercle horaire PE et déterminant les deux fuseaux opposés sur lesquels la courbe totale Σ est entièrement tracée.

REMARQUES.

On peut subdiviser ce premier cas général en quatre espèces, correspondantes aux quatre combinaisons que peuvent présenter les signes de tg $\mathfrak{L}$ et cot a.

Les valeurs absolues de tg $\mathfrak{L}$ et cot a restant les mêmes, par hypothèse, φ devient $(\pi + \varphi)$ ou $(\pi - \varphi)$ par un changement de signe de tg $\mathfrak{L}$ ou cot a. Ainsi, pour

$$\text{tg}\,\mathfrak{L} > 0 \begin{cases} \cot a < 0 \\ \cot a > 0 \end{cases} \text{la courbe} \begin{cases} \Sigma_1 \text{ est de l'espèce de } \Sigma, \\ \Sigma_2 \text{ est symétrique de } \Sigma_1 \text{ relativement au centre O de la terre,} \end{cases}$$

$$\text{tg}\,\mathfrak{L} < 0 \begin{cases} \cot a < 0 \\ \cot a > 0 \end{cases} \text{la courbe} \begin{cases} \Sigma_3 \text{ est symétrique de } \Sigma_1 \text{ relativement à l'équateur R,} \\ \Sigma_4 \text{ est symétrique de } \Sigma_3 \text{ relativement à O ou de } \Sigma_2 \text{ relativement à R.} \end{cases}$$

2e Cas. $\sin^2 a = \sin^2 \mathfrak{L}$.

Alors t peut varier de 0 à 2π et la condition (9) a toujours lieu. $\omega = PC = PC_1 = \frac{\pi}{2}\cdot$ Les cercles horaires PB_1, PB sont opposés l'un à l'autre et perpendiculaires à PE. Les points C, C_1 se confondent et la courbe prend, sur la terre, la forme d'un ∞ dont les boucles passent, l'une par P, E, l'autre par P′, E′ et se croisent sur l'équateur.

3e Cas. $\sin^2 a > \sin^2 \mathfrak{L}$.

La condition de possibilité a toujours lieu et t peut varier de 0 à 2π. Les deux boucles du ∞ se séparent et forment deux courbes fermées distinctes, l'une passant par P, E, l'autre par P′, E′. On s'en assure aisément en suivant les valeurs de φ lorsque t varie de 0 à 2π.

Les remarques du 1er cas s'appliquent d'ailleurs aux 2e et 3e.

92e Exercice.

Étudier la forme de la courbe Σ d'égal azimut (Exercice 91), *en projection orthographique sur une carte.*

Solution : 1° Rapportons cette courbe à trois axes de coordonnées rectangulaires, menés par le centre O de la terre : Ox, Oy situés

dans l'équateur et dans les cercles horaires respectifs PE, Py d'ascension droite $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} + \frac{\pi}{2}$; O$z$ dirigé suivant OP. En conservant les notations des exercices précédents, on a, pour un point quelconque de la courbe,

$$x = \sin \varphi \cos t, \qquad y = \sin \varphi \sin t, \qquad z = \cos \varphi.$$

En éliminant φ et t entre ces relations et l'égalité (1) de l'exercice 90,

$$\cot \mathfrak{L} \sin \varphi = \cos \varphi \cos t - \sin t \cot a,$$

on a :

$$(1) \qquad (x^2 + y^2) \cot \mathfrak{L} = xz - y \cot a,$$

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

pour les équations de la courbe. La surface (2) est celle de la sphère terrestre. La surface (1) est un hyperboloïde à une nappe dont le centre O′, situé sur Oy, a pour coordonnées α, β, γ :

$$\alpha = 0, \qquad \beta = -\tfrac{1}{2} \cot a \operatorname{tg} \mathfrak{L}, \qquad \gamma = 0,$$

dont les axes sont O′η' coïncidant avec Oy, O′ζ' parallèle à la bissectrice de l'angle $\widehat{\text{POE}}$, O′ξ' perpendiculaire à ζ'O′η', c'est-à-dire coïncident avec les axes O (x, y, z) après une translation β et une rotation $\frac{1}{2}\,\mathfrak{L}$ de ceux-ci suivant et autour de Oy; rotation de droite à gauche pour un personnage ayant les pieds en O et la tête en y. Les sections circulaires de cet hyperboloïde sont parallèles à Oy et font avec l'équateur, les unes l'angle 0°, les autres l'angle $\mathfrak{L}$.

Les projections de la courbe Σ sur les plans ξ'O′η' et η'O′ζ' sont des coniques.

Les projections de Σ sur les plans xOy de l'équateur et xOz du cercle horaire de l'étoile E ont, pour équations respectives,

$$(3) \qquad (x^2 + y^2) \cot \mathfrak{L} = x\sqrt{1 - x^2 - y^2} - y \cot a,$$

$$(4) \qquad (1 - z^2) \cot \mathfrak{L} = xz - \sqrt{1 - x^2 - z^2} \cot a;$$

ce sont deux courbes du 4ᵉ degré.

Nous laisserons de côté la discussion des coniques qui est facile et

nous esquisserons celle des courbes du 4e degré (3), (4) dont l'ensemble constitue l'épure de la courbe Σ d'égal azimut.

2° CONSTRUCTION DE L'ÉPURE DE LA COURBE Σ. — Les sections de l'hyperboloïde (1) par les plans coordonnés sont :

Par le plan xOy, le cercle $(x^2 + y^2) \cot \mathfrak{L} + y \cot a = 0$;
par le plan xOz, les deux droites OE, OZ;
par le plan yOz, la droite OZ et la droite AB parallèle à OZ ayant pour équations, dans ce plan, $y = -\cot a . \operatorname{tg} \mathfrak{L}$.

On peut considérer cet hyperboloïde comme engendré par le mouvement d'un cercle, de rayon variable, qui glisse sur les trois génératrices rectilignes OE, OZ, AB en restant parallèle au plan de l'équateur. Ce mode de génération permet de construire très simplement l'épure de la courbe Σ, par points, en coupant la sphère et l'hyperboloïde par des plans auxiliaires parallèles à l'équateur, après avoir pris les plans de projections horizontale et verticale parallèles à xOy et xOz respectivement.

Les sections déterminées par un plan auxiliaire quelconque seront deux cercles qui se projettent horizontalement en vraie grandeur et se coupent en deux points M, N de la courbe Σ. Les projections horizontales m, n de M, N sont deux points de la courbe (3); tandis que les projections verticales m', n' de M, N sont deux points de la courbe (4).

La tangente en un point quelconque M de Σ sera l'intersection des plans tangent en ce point à la sphère et à l'hyperboloïde. La construction du premier plan est connue. Celle du deuxième est facile. La droite menée par M et s'appuyant sur les génératrices OE, AB de l'hyperboloïde est elle-même une génératrice rectiligne D du même système que OZ. Le plan déterminé par D et la tangente en M à la section circulaire de l'hyperboloïde est le 2e plan tangent.

En effectuant ces constructions, nous avons obtenu les épures suivantes qui s'expliquent d'elles-mêmes *(fig. 60, 61, 62) :*

(O, O') est le centre de la sphère O;
(O, O'z') est l'axe OZ de rotation de la terre, génératrice de l'hyperboloïde;

$(Oe, O'e')$ est la génératrice rectiligne OE de l'hyperboloïde, passant par l'étoile;

$(a, a'z')$ est la génératrice AB, parallèle à OZ.

$p'q'$ un plan auxiliaire horizontal, coupant ces génératrices en trois points qui forment un triangle rectangle. La projection horizontale aOb de ce triangle passe toujours par les points fixes a, O. Le cercle circonscrit à aOb est la projection horizontale de la section circulaire H de l'hyperboloïde. La section de la sphère par le plan $p'q'$ est un autre cercle S qui coupe H aux deux points (m, m'), (n, n').

La construction de la tangente au point (m, m') est suffisamment indiquée sur la figure 60 du 1er cas de la discussion rapide que nous allons faire *(fig. 60, 61 et 62)*.

PROJECTION SUR L'ÉQUATEUR.

En prenant Ox pour axe de coordonnées polaires et posant

$$x = \rho \cos \theta, \qquad y = \rho \sin \theta,$$

l'équation (3) de cette projection devient

$$(5) \qquad (\rho \cot \mathfrak{L} + \cot a \sin \theta)^2 = (1 - \rho^2) \cos^2 \theta,$$

ou

$$(6) \qquad \rho = \frac{-\cot a \cot \mathfrak{L} \sin \theta \pm \cos \theta \sqrt{\operatorname{coséc}^2 \mathfrak{L} - \operatorname{coséc}^2 a . \sin^2 \theta}}{\cot^2 \mathfrak{L} + \cos^2 \theta}.$$

Pour chaque valeur de θ, elle fournit deux valeurs correspondantes de ρ qui ne sont réelles que si l'une ou l'autre des conditions

$$(7) \qquad \cos \theta = 0, \qquad \sin^2 \theta < \frac{\sin^2 a}{\sin^2 \mathfrak{L}}$$

est remplie.

L'équation (5) ne change pas si l'on y change les signes de ρ et θ. Elle représente donc une courbe symétrique par rapport à Oy. Cette courbe passe par O et admet en ce point deux tangentes symétriques relativement à l'axe Ox, inclinées sur lui de l'angle a, car on a

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \operatorname{tg}^2 a \qquad \text{pour} \qquad \rho = 0.$$

Les points de la courbe où ρ est maximum ou minimum satisfont à la fois à l'équation (5) et à celle qu'on obtient en faisant $\frac{d\rho}{d\theta}$ nul dans cette équation (5) différentiée relativement à θ, savoir :

(8) $$(\rho^2 - 1) \sin \theta = (\rho \cot \mathfrak{L} + \sin \theta \cot \alpha) \cot \alpha.$$

L'élimination de $(\rho \cot \mathfrak{L} + \sin \theta \cot \alpha)$ entre (5) et (8) donne

(9) $$[(\rho^2 - 1) \sin^2 \theta \operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \theta] (\rho^2 - 1) = 0.$$

La recherche de ces points de maximum ou minimum revient à résoudre les équations (8), (9), c'est-à-dire les deux systèmes (10) et (11),

(10) $$\rho^2 - 1 = 0, \qquad \rho \cot \mathfrak{L} + \sin \theta \cot \alpha = 0,$$

(11) $$(\rho^2 - 1) \sin^2 \theta \operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \theta = 0, \quad (\rho \cot \mathfrak{L} + \sin \theta \cot \alpha) = (\rho^2 - 1) \sin \theta \operatorname{tg} \alpha.$$

Le système (10) admet évidemment la solution

(I) $$\rho = \pm 1, \qquad \sin \theta = \mp \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \mathfrak{L}}.$$

Pour résoudre le système (11), remarquons qu'il n'admet pas l'hypothèse $\sin \theta = 0$ qui le réduirait à l'absurdité $\rho = 0$, $1 = 0$. On peut donc multiplier par $\operatorname{tg} \alpha \sin \theta$ la deuxième équation de ce système pour obtenir aisément sa solution

(II) $$\rho = \pm \frac{\sin \mathfrak{L}}{\sin \alpha}, \qquad \sin \theta = \mp \frac{\cos \alpha}{\cos \mathfrak{L}}.$$

On doit prendre ensemble dans (I) et (II) les signes d'une même ligne horizontale.

Cela posé, distinguons trois cas.

1^er^ Cas. $\sin^2 \alpha < \sin^2 \mathfrak{L}$. — Posons, comme définition d'un angle ω compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$,

$$\sin^2 \omega = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \mathfrak{L}},$$

nous aurons

$$-\omega < \alpha < \omega \qquad \text{ou} \qquad \pi - \omega < \alpha < \pi + \omega,$$

et ρ ne sera réel que si l'une ou l'autre des conditions

$$\cos\theta = 0, \quad \sin^2\theta < \sin^2\omega$$

est remplie.

A la première condition répond un point unique a, isolé, étranger à la question astronomique, $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, $\rho = \mp\frac{\cot a}{\cot \mathfrak{L}}$. Ce point, extérieur au contour apparent de la sphère, est sur la direction Oy ou la direction opposée suivant que $\cot a$, $\cot \mathfrak{L}$ sont de signes contraires ou non.

La deuxième condition équivaut à celle-ci :

$$-\omega < \theta < \omega \quad \text{ou} \quad \pi - \omega < \theta < \pi + \omega.$$

La courbe est donc, abstraction faite du point isolé a, comprise entièrement entre deux rayons vecteurs inclinés symétriquement de ω sur Ox. Ces rayons sont tangents à la courbe, aux points m'', n'' à une distance de O égale à $\frac{\cos \mathfrak{L}}{\cos a}$.

Les formules (I) donnent les seuls points α, β où ρ est maximum. Les formules (II) sont inapplicables, puisqu'elles donneraient, pour de tels points, $\sin^2\theta > 1$.

2e Cas. $\sin^2 a = \sin^2 \mathfrak{L}$. — L'angle θ peut alors varier de $-\pi$ à $+\pi$ sans que ρ cesse d'être réel. Le point $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, $\rho = \mp\frac{\cot a}{\cot \mathfrak{L}}$ cesse d'être isolé en a et se confond avec le point unique où ρ devient maximum, à l'intersection de l'axe Oy et du contour apparent de la sphère. Les coordonnées du premier point et celles du second, tirées soit de (I), soit de (II), se réduisent en effet à

$$\theta = \pm\frac{\pi}{2}, \quad \rho = \mp 1,$$

en prenant les signes sur une même ligne horizontale ou en croix, suivant que $\sin a$ et $\sin \mathfrak{L}$ sont de signes contraires ou non.

3e Cas. $\sin^2 a > \sin^2 \mathfrak{L}$. — L'angle θ peut encore prendre toutes les valeurs sans que ρ cesse d'être réel. Les points α, β où ρ devient

maximum sont donnés par les formules (II) seulement, les formules (I) devenant inapplicables.

Le point a fait partie de la courbe sans être isolé et tombe à l'intérieur du contour apparent de la sphère.

PROJECTION SUR LE CERCLE HORAIRE DE L'ÉTOILE.

Si nous prenons O' pour pôle, O'ξ' pour axe polaire et désignons par ρ, ψ les coordonnées polaires d'un point quelconque de cette projection, ψ étant compté positivement de Oξ' vers Oζ', nous aurons :

$$x = \rho \cos\left(\psi - \frac{\mathfrak{L}}{2}\right), \quad z = \rho \sin\left(\psi - \frac{\mathfrak{L}}{2}\right).$$

L'équation (4) de la projection devient, en coordonnées polaires,

$$(1) \quad \rho^4 (\cos \mathfrak{L} - \cos 2\psi)^2 + 4\rho^2 (\cos \mathfrak{L} \cos 2\psi - \alpha) + 4\alpha = 0,$$

en posant

$$(2) \qquad \alpha = \cos^2 \mathfrak{L} - \sin^2 \mathfrak{L} \cot^2 a \qquad \text{ou} \qquad 1 - \alpha = \frac{\sin^2 \mathfrak{L}}{\sin^2 a}.$$

L'équation (1) ne change pas si l'on change ψ en $\pi + \psi$, ψ en $-\psi$, $\frac{\pi}{2} - \psi$ en $\frac{\pi}{2} + \psi$. Donc la courbe admet O' pour centre et O'ξ', O'ζ' pour axes de symétrie. Pour l'étudier complètement, il suffira donc de faire varier ψ de 0 à $\frac{\pi}{2}$. On tire de (1)

$$(3) \quad \tfrac{1}{2}\rho^2 = \frac{\alpha - \cos \mathfrak{L} \cos 2\psi \pm \sqrt{\sin^2 \mathfrak{L} \cot^2 a \,(\cos^2 2\psi - \alpha)}}{(\cos \mathfrak{L} - \cos 2\psi)^2}.$$

Les points où ρ est maximum ou minimum satisfont à la fois à l'équation (1) et à celle qu'on obtient en la différentiant pour faire ensuite $\frac{d\rho}{d\psi}$ nul, savoir :

$$(4) \qquad \rho^2 \sin 2\psi \,[\rho^2 \cos 2\psi + (2 - \rho^2) \cos \mathfrak{L}] = 0.$$

Distinguons trois cas.

1er Cas. $\alpha < 0$ ou $\sin^2 a < \sin^2 \mathfrak{L}$. — Les deux valeurs (3) de $\frac{1}{2}\rho^2$ sont l'une positive, l'autre négative. La première seule,

$$\frac{1}{2}\rho^2 = \frac{\alpha - \cos \mathfrak{L} \cos 2\psi + \sqrt{\sin^2 \mathfrak{L} \cot^2 a\,(\cos^2 2\psi - \alpha)}}{(\cos \mathfrak{L} - \cos 2\psi)^2},$$

donne pour ρ des valeurs réelles et, de plus, égales et de signes contraires, quel que soit ψ. La seconde ne donne pour ρ que des valeurs imaginaires.

Pour obtenir les points où ρ est soit maximum, soit minimum, résolvons (1) et (4). L'équation (4) se décompose en trois autres :

$$\rho^2 = 0, \quad \sin 2\psi = 0, \quad \rho^2 (\cos \mathfrak{L} - \cos 2\psi) = 2 \cos \mathfrak{L}.$$

La première, $\rho = 0$, n'est pas admissible, car elle réduirait (1) à $\alpha = 0$, ce qui n'est pas le cas actuel.

La seconde donne, dans le premier quadrant, $\psi = 0$ et $\psi = \frac{\pi}{2}$, valeurs auxquelles répondent les points μ, ν où ρ est minimum.

La troisième forme avec l'équation (1) un système facile à résoudre. En éliminant ρ, on trouve

$$(\cos \mathfrak{L} + \cos 2\psi)(\alpha - \cos^2 \mathfrak{L}) = 0,$$

ou bien

$$\cos 2\psi = -\cos \mathfrak{L}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\mathfrak{L}}{2},$$

puisque le facteur $(\alpha - \cos^2 \mathfrak{L})$ est essentiellement négatif dans le cas considéré. Cette valeur de ψ donne le point e', dans le premier quadrant, pour lequel ρ est maximum et égal à l'unité.

En prenant les symétriques, par rapport à $O'\xi'$, $O'\zeta'$ et O' du premier quart $\mu e' \beta' \nu$ de la courbe, on a les trois autres quarts.

Les projections, sur le même cercle horaire de l'étoile, des deux cercles PCP', PC_1P' considérés dans la figure en perspective 59 de l'exercice 91, sont deux ellipses de centre O', égales, symétriques l'une de l'autre par rapport à $O'\xi'$, $O'\zeta'$, dont les grands axes, égaux à 2, sont dirigés suivant $O'e'$, $O'z'$ et qui touchent chacune en quatre points la projection de la courbe Σ, comme il est indiqué sur l'épure.

2° CAS. $x = 0$ ou $\sin^2 \alpha = \sin^2 \mathfrak{L}$. — L'équation (1) se réduit alors à celles-ci :

$$(5) \qquad \rho = 0, \quad \rho^2 = -4 \cos \mathfrak{L} \frac{\cos 2\psi}{(\cos \mathfrak{L} - \cos 2\psi)^2},$$

dont la dernière comprend la première. Les deux ellipses dont nous venons de parler se réduisent d'ailleurs à leurs grands axes $\varepsilon'\varepsilon$, $e'e''$.

$$\text{Si} \begin{cases} \mathfrak{L} < 90^\circ \\ \mathfrak{L} > 90^\circ \end{cases} \text{on doit prendre} \begin{cases} \frac{\pi}{4} < \psi < 3\frac{\pi}{4} \\ -\frac{\pi}{4} < \psi < \frac{\pi}{4} \end{cases} \text{pour que } \rho \text{ soit réel.}$$

La courbe a la forme d'un 8, comme il est indiqué sur l'épure faite pour $\mathfrak{L} < 90^\circ$.

Les points où ρ est maximum ou minimum s'obtiennent comme dans le cas précédent.

Si $\mathfrak{L} = 90^\circ$, on aura constamment $\rho = 0$ pour toute valeur de ψ, à moins que $\cos 2\psi = \cos \mathfrak{L}$, hypothèse pour laquelle ρ est indéterminé. Ainsi, lorsque $\mathfrak{L} = 90^\circ$, la courbe Σ se compose de l'équateur et du grand cercle horaire perpendiculaire à PE, lesquels se projettent suivant leurs propres diamètres situés dans le plan $\xi'O'\zeta'$ et ayant pour équations respectives

$$\psi = +\frac{\mathfrak{L}}{2} \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{0}{0}, \qquad \psi = -\frac{\mathfrak{L}}{2} \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{0}{0}.$$

3° CAS. $x > 0$ ou $\sin^2 \alpha > \sin^2 \mathfrak{L}$. — On a alors les inégalités suivantes :

$$\alpha < \cos^2 \mathfrak{L}, \qquad \alpha^2 < \alpha \cos^2 \mathfrak{L},$$

soit $2u$ l'arc compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, défini par

$$\cos^2 2u = \alpha.$$

Dans ce cas, le signe des deux valeurs (3) de $\frac{1}{2}\rho^2$ est toujours celui de $(x - \cos \mathfrak{L} \cos 2\psi)$, lorsque le radical est réel. Les quatre valeurs de ρ sont donc à la fois réelles ou imaginaires; leur réalité exige les

deux conditions

(6) $$\cos^2 2\psi > \alpha = \cos^2 2u,$$

(7) $$\cos 2\psi \cos \mathfrak{L} < \alpha.$$

La condition (6) entraîne l'une ou l'autre de celles-ci :

(6)′ $$-u < \psi < u,$$

(6)″ $$\frac{\pi}{2} - u < \psi < \frac{\pi}{2} + u.$$

1° Si $\mathfrak{L} < 90°$, la condition (6)″ est possible, car elle donne $\cos 2\psi$ négatif et entraîne la condition (7).

La condition (6)′ est au contraire impossible, car elle donne $\cos 2\psi$ positif et permet de conclure de (7) l'inégalité

$$\cos^2 2\psi \cos^2 \mathfrak{L} < \alpha^2 < \alpha \cos^2 \mathfrak{L},$$

ou

(8) $$\cos^2 2\psi < \alpha,$$

contradictoire de (6). La courbe est donc tout entière comprise entre les rayons vecteurs inclinés de $\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$ et $\left(\frac{\pi}{2} + u\right)$ sur $O'\xi'$.

2° Si $\mathfrak{L} > 90°$, la condition (6)′ est possible, car elle donne $\cos 2\psi$ positif et entraîne la condition (7).

La condition (6)″ est impossible, car elle donne $\cos 2\psi$ négatif et entraîne l'inégalité (8) contradictoire de (6). La courbe est donc tout entière entre les rayons vecteurs inclinés de $-u$ et $+u$ sur $O'\xi'$.

CAS PARTICULIERS.

Les trois cas généraux que nous venons d'examiner offrent quelques cas particuliers intéressants, dont nous donnerons seulement deux exemples.

1° Dans le premier cas général on peut supposer $\mathfrak{L} = \frac{\pi}{2}$ et $0 \lesseqgtr a \lesseqgtr \frac{\pi}{2}$; l'épure (63) a été construite dans cette hypothèse.

La projection horizontale a deux axes de symétrie Ox, Oy et pour équation

$$\rho^2 = 1 - \cot^2 a . \operatorname{tg}^2 \theta.$$

Le point isolé disparaît à l'infini.

La projection verticale a quatre axes de symétrie $O'\xi'$, $O'\zeta'$, $O'x'$, $O'z'$, partageant la circonférence O', contour apparent de la terre, en huit angles égaux à $\frac{\pi}{4}$. Elle a pour équation :

$$\rho^4 . \cos^2 2\psi + 4\rho^2 . \cot^2 a - 4 \cot^2 a = 0.$$

La courbe Σ est à l'intersection de la terre et du paraboloïde hyperbolique

$$xz = y \cot a.$$

2° Dans le troisième cas général on peut supposer $a = \frac{\pi}{2}$, $0 \lesssim \mathcal{D} \lesssim \frac{\pi}{2}$; l'épure (64) a été construite dans cette hypothèse.

La projection horizontale a deux axes de symétrie Ox, Oy et pour équation

$$\frac{1}{\rho^2} = 1 + \cot^2 \mathcal{D} \operatorname{séc}^2 \theta.$$

La projection verticale se compose de deux arcs de l'hyperbole

$$1 - z^2 = xz \operatorname{tg} \mathcal{D}.$$

La courbe Σ est l'intersection de la sphère terrestre et du cône

$$x^2 + y^2 = xz . \operatorname{tg} \mathcal{D}.$$

93e Exercice.

Quelle est la route terrestre d'un voyageur fictif A, *qui marcherait toujours dans l'azimut d'une étoile donnée* E′ ($\mathcal{A}'$, $\mathcal{D}'$), *en maintenant invariable la distance zénithale z d'une autre étoile aussi donnée* E ($\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$)?

Solution : 1° Prenons pour centre et rayon de la sphère céleste supposée mobile, ceux de la sphère terrestre elle-même supposée immobile. La position sphérique de l'étoile E décrit sur la terre, avec la vitesse angulaire ω du mouvement diurne, un parallèle mE dans le sens rétrograde indiqué par la flèche f *(fig. 65)*. Le voyageur A ayant toujours cette étoile à une distance zénithale invariable z, est animé autour de E d'une rotation relative sur un petit cercle σ décrit de E comme pôle avec z comme rayon sphérique. La vitesse relative v' de A sur ce petit cercle, composée avec la vitesse d'entraînement v du point A, doit donner une vitesse résultante dirigée suivant la tangente Au en A au grand cercle AE'. On a donc, dans le triangle infiniment petit Avu, dont les trois côtés sont parallèles et proportionnels à ces vitesses,

(1) $$v.\sin A = v' \sin u.$$

Posons

$$\alpha = E'AE = \widehat{v'AE} + u = \frac{\pi}{2} + u,$$

$$\beta = E'AP = \widehat{vAP} - A = \frac{\pi}{2} - A,$$

l'équation (1) devient

(2) $$v \cos\beta + v' \cos\alpha = 0.$$

Mais

$$v = \omega.\sin\varphi, \quad v' = \frac{dx}{d\theta}\sin z = \omega \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \sin z$$

si l'on désigne par :

θ l'heure stellaire comptée avec E sous le méridien origine Pm;

$t = \omega\theta$ l'angle horaire de E compté du méridien origine Pm;

x l'angle de EA avec EP, compté à partir de EP de 0 à 360° dans le sens rétrograde f' ou de gauche à droite pour l'observateur ayant la tête en E et les pieds au centre de la terre. Cet angle détermine la position de A sur σ.

φ la latitude PA du voyageur.

Par suite,

(3) $$\sin\varphi \cos\beta + \frac{dx}{dt}\sin z \cos\alpha = 0.$$

D'ailleurs, il est facile d'exprimer α, β, φ en fonction de x. Si l'on pose

$$\mathrm{EE}' = 2\delta, \quad \mathrm{E'A} = 2\delta', \quad \mathrm{E'EP} = m,$$

les constantes 2δ, m sont fournies par le triangle EPE' qui donne les formules

$$\cos 2\delta = \cos \mathfrak{L} \cos \mathfrak{L}' + \sin \mathfrak{L} \sin \mathfrak{L}' \cos(\mathfrak{M} - \mathfrak{M}'),$$
$$\sin 2\delta . \cos m = \cos \mathfrak{L}' \sin \mathfrak{L} - \sin \mathfrak{L}' \cos \mathfrak{L} \cos(\mathfrak{M} - \mathfrak{M}').$$

Les variables $2\delta'$ et α sont données de même par le triangle E'EA qui fournit les relations

$$(4) \qquad \cos 2\delta' = \cos 2\delta . \cos z + \sin 2\delta \sin z \cos(x + m),$$
$$(5) \qquad \sin 2\delta' \cos \alpha = \cos 2\delta \sin z - \sin 2\delta \cos z \cos(x + m),$$

enfin φ et β se tirent des triangles PAE, PAE' qui donnent respectivement

$$(6) \qquad \cos \varphi = \cos \mathfrak{L} \cos z + \sin \mathfrak{L} \sin z \cos x,$$
$$(7) \qquad \cos \mathfrak{L}' = \cos 2\delta' \cos \varphi + \sin 2\delta' \sin \varphi \cos \beta.$$

On voit que si l'on multiplie les deux membres de l'équation (3) par $\sin 2\delta'$ et si l'on y remplace ensuite $\sin 2\delta' \cos \alpha$, $\sin 2\delta' \sin \varphi \cos \beta$ par leurs valeurs tirées de (5), (7), on obtient

$$(8) \quad \sin z \frac{dx}{dt}[\cos 2\delta \sin z - \sin 2\delta \cos z \cos(x + m)] + (\cos \mathfrak{L}' - \cos \varphi \cos 2\delta') = 0,$$

ou, en substituant à $\cos \varphi$, $\cos 2\delta'$ leurs expressions (6), (4) et résolvant par rapport à dt

$$(9) \, dt = \frac{\sin z[\cos 2\delta \sin z - \sin 2\delta \cos z \cos(x + m)]\, dx}{(\cos \mathfrak{L} \cos z + \sin \mathfrak{L} \sin z \cos x)[\cos 2\delta \cos z + \sin 2\delta \sin z \cos(x + m)] - \cos \mathfrak{L}'}.$$

Telle est l'équation différentielle qui donne x en fonction de t ou de θ, c'est-à-dire le mouvement relatif de A autour de E.

Cette équation (9) est ramenée à une quadrature, qu'on peut toujours effectuer, en suivant les règles élémentaires connues.

Pour abréger, nous laisserons au lecteur le soin d'exécuter cette quadrature dans le cas général. Nous remarquerons seulement qu'en

vertu de l'équation (8), $\frac{dx}{dt}$ est nul lorsque $\cos \mathfrak{L}' = \cos \varphi \cos 2\delta'$, c'est-à-dire lorsque l'angle $\widehat{E'AP}$ est droit ou que la vitesse d'entraînement de A est dirigée sur E'.

2° Examinons le cas particulier où l'étoile E' se confond avec l'étoile E, c'est-à-dire où le voyageur fictif poursuit directement E sous une hauteur constante. Alors on a $2\delta = 0$, $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}$, $m = \frac{\pi}{2}$, et (9) devient

$$(10) \qquad dt = \frac{\sin^2 z \, dx}{\sin \mathfrak{L} \sin z \cos z \cos x - \cos \mathfrak{L} \sin^2 z},$$

ou

$$(11) \qquad dt = \frac{dy}{\cos \mathfrak{L} + \sin \mathfrak{L} \cot z \cos y},$$

en posant

$$x = 180^\circ - y,$$

et comptant y positivement dans le sens direct à partir de e'. On démontre, dans tous les cours de calcul intégral, que

$$(12) \int \frac{dy}{a + b\cos y} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \, l \dfrac{\sqrt{b+a} + \sqrt{b-a}\,\mathrm{tg}\dfrac{y}{2}}{\sqrt{b+a} - \sqrt{b-a}\,\mathrm{tg}\dfrac{y}{2}} & \text{si } a^2 < b^2, \\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \,\mathrm{arc\,tg}\,.\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{y}{2} & \text{si } a^2 > b^2. \end{cases}$$

On aura donc, en appliquant ces formules au cas actuel, c'est-à-dire en posant

$$a = \cos \mathfrak{L}, \qquad b = \sin \mathfrak{L} \cot z,$$

et en les résolvant par rapport à $\mathrm{tg}\,\frac{y}{2}$,

$$(13) \qquad \mathrm{tg}\,\frac{y}{2} = \cot\frac{x}{2} = h \cdot \frac{e^{kt} - C}{e^{kt} + C} \qquad \text{si} \quad \mathrm{tg}^2 z < \mathrm{tg}^2 \mathfrak{L},$$

$$(14) \qquad \mathrm{tg}\,\frac{y}{2} = \cot\frac{x}{2} = h' \,.\, \mathrm{tg}\,\frac{k'}{2}(t + C') \qquad \text{si} \quad \mathrm{tg}^2 z > \mathrm{tg}^2 \mathfrak{L},$$

C, C′ étant des constantes arbitraires; h, k, h', k' des constantes définies par

$$h = \sqrt{\frac{\sin(\mathfrak{L} + z)}{\sin(\mathfrak{L} - z)}}, \quad k = \text{coséc}\, z.\sqrt{\sin(\mathfrak{L} + z)\sin(\mathfrak{L} - z)},$$

$$h' = \sqrt{\frac{\sin(z + \mathfrak{L})}{\sin(z - \mathfrak{L})}}, \quad k' = \text{coséc}\, z\sqrt{\sin(z + \mathfrak{L})\sin(z - \mathfrak{L})},$$

les radicaux devant être pris avec le même signe, soit le signe *plus*, dans chacune des formules (13), (14), qui ne changent pas d'ailleurs avec ce signe.

1er Cas. $\text{tg}^2 z < \text{tg}^2 \mathfrak{L}$.

On emploiera l'équation (13) si l'on a

$$z < \mathfrak{L} < 180^\circ - z,$$

c'est-à-dire si le petit cercle σ ne renferme aucun des pôles de la sphère céleste, et on déterminera C par la valeur initiale y_0 de y pour $t = 0$, c'est-à-dire par la formule

$$C = \frac{h - \text{tg}\,\frac{y_0}{2}}{h + \text{tg}\,\frac{y_0}{2}}.$$

La dérivée de $\text{tg}\,\frac{y}{2}$ a toujours le signe de C. La constante C est nulle ou infinie si l'on a

$$\text{tg}^2\frac{y_0}{2} = h^2 \quad \text{ou} \quad \cos y_0 = -\cot\mathfrak{L}.\text{tg}\, z,$$

c'est-à-dire si la position initiale A_0 de A est l'un des points de contact p, q des cercles horaires tangents au petit cercle σ.

Si $\text{tg}\,\frac{y_0}{2}$ est positif et égal à h, C est nul et A_0 est en p; si $\text{tg}\,\frac{y_0}{2}$ est négatif et égal à $-h$, C est infini et A_0 est en q. Dans l'une ou l'autre hypothèse, l'équation (13) se réduit à

$$y = y_0,$$

et le point A reste en repos relatif autour de E soit en p, soit en q,

résultat évident *a priori* puisque les vitesses d'entraînement diurne des points p, q du cercle σ sont dirigées dans l'azimut de E.

1° Si l'on a

$$-h < \operatorname{tg}\frac{y_0}{2} < h,$$

le point A_0 se trouve sur l'arc $pe'q$ du cercle σ et la constante C est positive. Le temps sidéral θ ou l'angle horaire t de E croissant de $-\infty$ à $+\infty$, $\operatorname{tg}\frac{y}{2}$ croît sans cesse de $-h$ à $+h$. Le voyageur A, parti d'un point voisin de q à une époque voisine de $t = -\infty$, décrit l'arc $qe'p$ dans le sens direct, en s'avançant constamment vers le point p qu'il n'atteint qu'à l'époque $t = \infty$ avec une vitesse nulle. La loi de variation de la vitesse de A est d'ailleurs facile à établir.

2° Si $\operatorname{tg}\frac{y_0}{2}$ est en dehors de l'intervalle $-h$ à $+h$, le point A_0 est sur l'arc peq de σ et la constante C est négative. t croissant de $-\infty$ à $+\infty$, $\operatorname{tg}\frac{y}{2}$ décroît constamment de $-h$ à $-\infty$, puis de $+\infty$ à $+h$. Le voyageur A, parti d'un point voisin de q à une époque voisine de $t = -\infty$, décrit l'arc qep, dans le sens rétrograde, en s'avançant constamment vers le point p qu'il n'atteint qu'à l'époque $t = \infty$ avec une vitesse nulle. La loi de variation de la vitesse de A est d'ailleurs facile à établir.

Nous dirons que l'arc qep est *rétrograde*, que l'arc $qe'p$ est *direct* et que p, q sont les *points asymptotes* du mouvement.

REMARQUES.

1° Dans les deux sous-cas, le voyageur fictif traverse le cercle horaire de l'étoile E, soit en e, soit en e', à un certain moment. Prenons ce moment pour origine du temps sidéral θ, c'est-à-dire comptons t à partir du méridien terrestre qui coïncide avec PE à ce moment *(fig. 65)*.

Dans le premier sous-cas, nous aurons, pour l'arc direct,

$$y = 0, \quad \text{pour} \quad t = 0; \quad \text{par suite} \quad C = 1$$

et

(15)
$$\operatorname{tg}\frac{y}{2} = h\,\frac{e^{kt}-1}{e^{kt}+1}.$$

Dans le deuxième sous-cas, nous aurons, pour l'arc rétrograde,

$$x = 0, \quad \text{pour} \quad t = 0; \quad \text{par suite} \quad C = -1$$

et

(16)
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{h}\cdot\frac{e^{kt}-1}{e^{kt}+1}.$$

2° Les formules (15) et (16) s'appliquent également *(fig. 66)* soit aux arcs $qe'p$ et qep du cercle σ_1 correspondant à une étoile boréale E_1 pour laquelle $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 < 90°$, soit aux arcs $qe'p$, qep du cercle σ_2 correspondant à une étoile australe E_2 pour laquelle $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_2 > 90°$. Mais l'arc rétrograde qep est plus petit ou plus grand que l'arc direct $qe'p$ suivant qu'il s'agit de σ_1 ou σ_2. Ces arcs sont égaux seulement lorsque $\mathfrak{L} = 90°$. Alors $h = 1$ et les formules (15), (16) deviennent

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2} = \frac{e^{kt}-1}{e^{kt}+1}, \quad \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{e^{kt}-1}{e^{kt}+1}.$$

3° Si, comme l'indique la figure, deux voyageurs différents A_1, A_2 poursuivent, sous la même distance zénithale z, respectivement deux étoiles E_1, E_2 dont les distances polaires sont liées par

$$\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 = 180°,$$

les valeurs h_1, h_2 de h, k_1, k_2 de k seront liées par

$$h_1 h_2 = 1, \quad k_1 = k_2.$$

Les lois du mouvement sur chaque arc, direct et rétrograde, de σ_1 étant exprimées par (15) et (16), celles du mouvement sur les arcs rétrograde et direct de σ_2, opposés aux premiers deux à deux, seront exprimées aussi par les mêmes équations, après permutation entre x et y.

2° Cas. $\operatorname{tg}^2 z = \operatorname{tg}^2 \mathfrak{L}$.

Ce cas échappe aux formules (13) et (14) qu'il rend illusoires, mais il est facile à traiter directement *(fig. 67)*.

1° Si l'étoile E_1 est boréale, on a $\cos \mathfrak{L} > 0$ et, z étant toujours inférieur à 90°,

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{tg} \mathfrak{L}, \qquad z = \mathfrak{L}.$$

Par suite, l'équation différentielle (11) du problème devient

$$2 \cos \mathfrak{L}\, dt = \text{séc}^2 \tfrac{1}{2} y . dy$$

et donne

$$\operatorname{tg} \frac{y}{2} = (t + C) \cos \mathfrak{L}.$$

On voit que toutes les valeurs de y sont possibles.

Puisque $z = \mathfrak{L}$, le petit cercle σ_1 passe par le pôle boréal P de la sphère céleste qui coïncide avec les points e, p, q. Si l'on prend pour méridien origine celui qui coïncide avec Pe' à l'instant où le voyageur A_1 passe en e', la constante C sera nulle et l'on aura

$$\operatorname{tg} \frac{y}{2} = t . \cos \mathfrak{L}. \tag{17}$$

Parti d'un point voisin et à l'ouest du pôle à une époque voisine de $t = -\infty$, le voyageur décrit σ_1 dans le sens direct et retourne au pôle qu'il n'atteint qu'à l'époque $t = \infty$ avec une vitesse nulle. Sa vitesse, d'abord très petite, croît de P en e', puis décroît symétriquement de e' en P en passant par les mêmes valeurs, mais en ordre inverse.

2° Si l'étoile E_2 est australe, on a $\cos \mathfrak{L} < 0$, et, par suite,

$$\operatorname{tg} z = -\operatorname{tg} \mathfrak{L}, \qquad z = 180° - \mathfrak{L},$$

$$2 \cos \mathfrak{L}\, dt = \text{coséc}^2 \frac{y}{2}\, dy,$$

$$-\cot \frac{y}{2} = (t + C) \cos \mathfrak{L}.$$

On voit que toutes les valeurs de y sont possibles.

Puisque $z = 180° - \mathfrak{L}$, le petit cercle σ_2 passe par le pôle austral P' qui coïncide avec les points e', p, q. Si l'on prend pour méridien origine celui qui coïncide avec $P'e$ à l'instant où le voyageur A_2 passe en e, la constante C sera nulle et l'on aura, en remplaçant y par $180° - x$,

$$-\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \cos \mathfrak{L}. \tag{18}$$

Parti d'un point voisin et à l'ouest du pôle, à une époque voisine de $t = -\infty$, le voyageur décrit σ_2 dans le sens rétrograde et retourne au pôle qu'il n'atteint qu'à l'époque $t = \infty$ avec une vitesse nulle. Sa vitesse, d'abord très petite, croît de P' en e, puis décroît symétriquement de e en P' en passant par les mêmes valeurs, mais en ordre inverse.

3° Si l'on avait $z = 90°$, outre la condition $\operatorname{tg}^2 z = \operatorname{tg}^2 \mathfrak{L}$, on aurait aussi $\mathfrak{L} = 90°$ et le cercle σ deviendrait un grand cercle Σ décrit autour de l'étoile équatoriale E comme pôle. Les équations (17), (18) seraient alors

$$y = 0, \quad x = 0.$$

Le voyageur, en repos relatif, n'aurait qu'à suivre le mouvement d'entraînement diurne, en décrivant son parallèle terrestre, d'un mouvement uniforme avec la vitesse ω.

3° Cas. $\operatorname{tg}^2 z > \operatorname{tg}^2 \mathfrak{L}$.

La distance polaire $\mathfrak{L}$ de l'étoile E est en dehors de l'intervalle z à $180° - z$ (*fig. 68*). On applique l'équation (14) :

1° Si l'on a $\mathfrak{L} < z$, l'étoile est boréale en E_1 et le petit cercle σ_1 renferme le pôle P. On a aussi

$$\cos \mathfrak{L} > \sin \mathfrak{L} . \cot z.$$

La vitesse

$$\frac{dy}{dt} = \cos \mathfrak{L} + \sin \mathfrak{L} \cot z \cos y,$$

a toujours le signe de $\cos \mathfrak{L}$ ou le signe *plus* et ne s'annule jamais. Le voyageur A_1 décrit donc continuellement le cercle σ_1 dans le sens direct, avec une vitesse croissante de e en e' et décroissante de e' en e.

Si l'on prend pour méridien origine celui qui coïncide avec Pe' au moment où le voyageur passe en e', la constante C' est nulle dans la formule (14) qui devient

$$\operatorname{tg} \frac{y}{2} = h' . \operatorname{tg} \cdot \frac{k'}{2} t. \tag{19}$$

2° Si l'on a $\mathfrak{L} > 180° - z$, l'étoile est australe en E_2 et le petit

cercle σ_2 renferme le pôle P'. On a aussi

$$\cos \mathfrak{L} < - \sin \mathfrak{L} \cot z.$$

La vitesse, jamais nulle, a toujours le signe de cos $\mathfrak{L}$ ou le signe *moins*. Le voyageur A_2 décrit σ_2 dans le sens rétrograde, avec une vitesse croissante de e' en e et décroissante de e en e'.

Si l'on prend pour méridien origine celui qui coïncide avec Pe au moment où le voyageur passe en e, la constante $C' = \pm \frac{\pi}{k'}$ dans la formule (14) qui devient

$$(20) \qquad - \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{h'} \operatorname{tg} \cdot \frac{k'}{2} t.$$

3° Si, comme l'indique la figure 68, deux voyageurs différents A_1, A_2 poursuivent, sous la même distance zénithale z, respectivement deux étoiles E_1, E_2 dont les distances polaires $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ sont liées par

$$\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 = 180^\circ,$$

les valeurs h'_1, h'_2 de h', k'_1, k'_2 de k' seront liées par

$$h'_1 h'_2 = 1, \quad k'_1 = k'_2,$$

et la loi du mouvement direct de A_1 sur σ_1 étant exprimée par l'équation (19), celle du mouvement rétrograde A_2 sur σ_2 sera exprimée par la même équation, après changement de y en x.

4° Dans ce troisième cas, la durée de la révolution du voyageur autour de l'étoile E est $\frac{2\pi}{\omega k'}$.

Cas singuliers. — Outre les trois cas généraux, on peut examiner quelques cas singuliers.

1° Si $\mathfrak{L} = 0$ ou π, les pôles seuls de la terre répondent à la question tant que a est différent de $\pm \pi$. Mais si l'on a simultanément $\mathfrak{L} = 0$, $a = \pm \pi$, tous les points de la sphère sont solutions.

2° Si $a = 0$ ou π, le lieu cherché se réduit au cercle horaire de l'étoile.

REMARQUE GÉNÉRALE.

On peut vérifier très simplement la forme générale de ces résultats par la considération du parallélogramme des vitesses. Si l'on décompose, dans chaque cas, la vitesse d'entraînement de A, entièrement connue, en deux autres, suivant les tangentes en A au vertical AE de l'étoile et au cercle σ, la première de ces composantes sera la vitesse absolue et la seconde, changée de sens, sera la vitesse relative de A.

On voit ainsi immédiatement, sans calcul, que cette dernière vitesse est toujours dirigée et que, par suite, le mouvement de A a toujours lieu dans le sens indiqué précédemment.

On peut aussi, presque aussi simplement, mais d'une manière beaucoup plus complète, atteindre le même but en discutant la valeur de cette vitesse relative ou l'équation différentielle (11)

$$\frac{dy}{dt} = \cos \mathfrak{L} + \sin \mathfrak{L} \cot z \cos y,$$

sans l'intégrer.

Position et orientation géographiques du voyageur. — Par les formules qui viennent d'être établies, on connaît à chaque instant, c'est-à-dire pour chaque valeur de 0 ou t, la valeur correspondante de x ou y. Pour calculer, à cet instant, la longitude $\mathfrak{L}$, la colatitude φ du voyageur et l'angle q sous lequel il franchit son méridien actuel, il suffit de considérer le triangle sphérique PAE, dans lequel

$$\mathrm{PE} = \mathfrak{L}, \quad \mathrm{EA} = z, \quad \mathrm{PEA} = \pm x$$

sont connus, tandis que les inconnues sont :

$$\mathrm{PA} = \varphi, \quad \mathrm{APE} = \pm (t - \mathfrak{L}), \quad \mathrm{PAE} = \pm q.$$

Ce triangle donne immédiatement φ, q, $(\mathfrak{L} - t)$ par les formules de Delambre. Si l'on pose

$$t - \mathfrak{L} = \tau,$$

on a

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\tau + q) = \frac{\cos \frac{1}{2}(z - \mathfrak{L})}{\cos \frac{1}{2}(z + \mathfrak{L})} \cot \frac{x}{2},$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\tau - q) = \frac{\sin \frac{1}{2}(z - \mathfrak{L})}{\sin \frac{1}{2}(z + \mathfrak{L})} \cot \frac{x}{2},$$

$$\cos \varphi = \cos \mathfrak{L} \cos z + \sin \mathfrak{L} \sin z \frac{\cot^2 \frac{x}{2} - 1}{\cot^2 \frac{x}{2} + 1}.$$

Nous avons donné précédemment, en fonction de t, l'expression simple de $\cot \frac{x}{2}$ qu'il est inutile de substituer ici.

Route du voyageur à la surface de la terre. — Posons

$$h' = \frac{\cos \frac{1}{2}(z - \mathfrak{L})}{\cos \frac{1}{2}(z + \mathfrak{L})}, \quad k' = \frac{\sin \frac{1}{2}(z - \mathfrak{L})}{\sin \frac{1}{2}(z + \mathfrak{L})}, \quad 2p = \mathfrak{L} + z + \varphi.$$

Les trois dernières équations donnent

(21) $$\tau = \operatorname{arc\,tg}.h' \cot \frac{x}{2} + \operatorname{arc\,tg}.k' \cot \frac{x}{2},$$

(22) $$q = \operatorname{arc\,tg}.h' \cot \frac{x}{2} - \operatorname{arc\,tg}.k' \cot \frac{x}{2},$$

(23) $$\cot \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin (p - \varphi)}{\sin (p - z) \sin (p - \mathfrak{L})}}.$$

Nous avons établi précédemment, dans tous les cas possibles, la formule du mouvement relatif du voyageur autour de l'étoile. De cette formule, on tire immédiatement t comme fonction connue f de $\cot \frac{x}{2}$, ou

(24) $$\tau = f\left(\cot \frac{x}{2}\right) - \mathfrak{L}.$$

En égalant les valeurs (21), (24) de τ, on a l'équation de la route

terrestre

$$(25) \qquad \mathfrak{L} = f\left(\cot\frac{x}{2}\right) - \text{arc tg}.h'' \cot\frac{x}{2} - \text{arc tg}.k'' \cot\frac{x}{2},$$

où l'on doit supposer $\cot\frac{x}{2}$ remplacé par sa valeur (23) en φ.

Par exemple, dans le premier cas, lorsque le mouvement relatif est donné par la formule (16), on a

$$t = f = \frac{1}{k}\, l\left(h + \cot\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{k}\, l\left(h - \cot\frac{x}{2}\right).$$

Dans le troisième cas, lorsque le mouvement relatif est donné par la formule (19), on a

$$t = f = \frac{2}{k'}\,\text{arc tg}\cdot\frac{1}{h'}\cot\frac{x}{2}.$$

94e Exercice.

Établir directement les équations différentielles qui donnent la position et la route du voyageur précédent, sans passer par l'étude de son mouvement relatif autour de l'étoile E *qu'il poursuit sous une hauteur constante* $90^\circ - z$.

Solution : 1° Rapportons toujours au même méridien origine, Pm, la longitude $\mathfrak{L}$ du voyageur A et l'angle horaire t de l'étoile. Pendant le temps infiniment petit $d\theta$, qui suit l'époque θ, l'étoile s'avance de EE′ dans le sens du mouvement diurne et le voyageur, de AA′ dans la direction AE *(fig. 69)*, de telle sorte que les distances zénithales AE, A′E′ aux époques θ, $\theta + d\theta$ soient égales. L'équation du problème est donc

$$A'E' = AE = z;$$

abaissons l'arc de grand cercle E′e perpendiculaire à AE. On aura, en négligeant les petites quantités du second ordre, l'équation équivalente

$$AA' = Ee,$$

mais, si l'on appelle s l'arc de la route décrite par le voyageur sur la terre, on a $AA' = ds$. D'ailleurs, $Ee = EE' \cos \widehat{eEE'} = EE' \sin \widehat{PEA}$ et $EE' = \sin \mathfrak{L}.\omega d\theta = \sin \mathfrak{L} dt$, $PEA = x$. Par suite,

$$ds = \sin \mathfrak{L} \sin x . dt. \tag{1}$$

Abaissons, de A', le grand cercle $A'a$ perpendiculaire à PA. Dans le triangle rectangle $AA'a$, on a

$$AA' = ds, \quad A'a = \sin \varphi . d\mathfrak{L}, \quad Aa = -d\varphi, \quad \widehat{A} = q,$$

et, par conséquent, les formules

$$(2) \qquad \begin{cases} \sin \varphi \, d\mathfrak{L} = ds . \sin q = \sin \mathfrak{L} \sin x \sin q . dt, \\ \quad -d\varphi = ds . \cos q = \sin \mathfrak{L} \sin x \cos q . dt, \end{cases}$$

qu'on peut aussi tirer du tableau B (n° 16 du COURS) des équations différentielles, appliquées au triangle PAE où l'on ferait varier seulement le côté AE de ds.

Mais le triangle PEA donne les relations

$$\frac{\sin x}{\sin \varphi} = \frac{\sin q}{\sin \mathfrak{L}} = \frac{\sin (t - \mathfrak{L})}{\sin z}, \tag{3}$$

$$\cos \mathfrak{L} = \cos \varphi \cos z + \sin \varphi \sin z \cos q. \tag{4}$$

Si l'on en tire $\sin x$, $\sin q$, $\cos q$ en fonction de $\mathfrak{L}, \varphi, z, (t - \mathfrak{L})$ pour substituer dans (2), on obtient immédiatement

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \sin^2 \mathfrak{L} \operatorname{coséc}^2 z . \sin^2 (t - \mathfrak{L}), \tag{5}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sin \mathfrak{L} \operatorname{coséc}^2 z (\cos \varphi \cos z - \cos \mathfrak{L}) \sin (t - \mathfrak{L}). \tag{6}$$

2° La solution précédente est géométrique et tout à fait directe. On peut aussi facilement établir les équations (5), (6), par des transformations algébriques, aussitôt qu'on a obtenu l'équation (11) de l'exercice précédent,

$$\frac{dy}{dt} = \cos \mathfrak{L} + \sin \mathfrak{L} \cot z . \cos y,$$

et avant toute intégration.

Outre les relations (3), (4), le triangle PEA donne encore

$$(7)\qquad \cos\varphi = \cos\mathfrak{L}\cos z - \sin\mathfrak{L}\sin z\cos y,$$

$$(8)\qquad \sin\varphi\cos q = \cos\mathfrak{L}\sin z + \sin\mathfrak{L}\cos z\cos y,$$

les relations (8) et (4) permettent d'écrire de suite et successivement

$$\frac{dy}{dt} = \sin\varphi\cos q\ \text{coséc}\ z = \text{coséc}^2 z\,(\cos\mathfrak{L} - \cos\varphi\cos z).$$

Si l'on désigne $(t - \mathcal{L})$ par τ, on voit immédiatement, soit par la géométrie, soit par l'une des formules différentielles du tableau B (n° 16 du COURS), que

$$\frac{d\tau}{dy} = \sin z\ \text{coséc}\ \varphi\cos q,$$

donc

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 - \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{d\tau}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} = \cos^2 q,$$

d'où

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sin^2 q = \sin^2\mathfrak{L}\ \text{coséc}^2 z.\sin^2(t - \mathcal{L}).$$

D'autre part, la relation (7) différentiée donne successivement, en ayant égard aux relations (3) et se rappelant que $y = 180° - x$,

$$-\sin\varphi\, d\varphi = \sin\mathfrak{L}\sin z\sin y.dy = \sin\mathfrak{L}\sin\varphi\sin\tau.dy$$
$$= \sin\varphi\sin\mathfrak{L}\ \text{coséc}\ z\sin\tau\sin\varphi\cos q\, dt,$$

ou, en remplaçant $\sin\varphi\cos q$ par sa valeur tirée de (4),

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sin\mathfrak{L}\ \text{coséc}^2 z\,(\cos\varphi\cos z - \cos\mathfrak{L})\sin(t - \mathcal{L}).$$

3° Si l'on divise membre à membre les équations (2), on a

$$\sin\varphi\cdot\frac{d\mathcal{L}}{d\varphi} = -\operatorname{tg} q,$$

ou, en tirant $\cos q$ et, par suite, $\operatorname{tg} q$ de l'équation (4) et résolvant par rapport à $d\mathcal{L}$,

$$(9)\qquad \overline{d\mathcal{L}}^2 = \frac{\sin^2\varphi\sin^2 z - (\cos\mathfrak{L} - \cos\varphi\cos z)^2}{\sin^2\varphi\,(\cos\mathfrak{L} - \cos\varphi\cos z)^2}\,\overline{d\varphi}^2,$$

pour l'équation différentielle de la route terrestre du voyageur. Son intégration se réduit à une quadrature.

En intégrant (5), (6), (9), on retombera sur des résultats établis dans l'exercice précédent. Il y a là, pour le lecteur, un nouvel exercice de calcul.

En terminant, remarquons que la deuxième équation (2), après substitution à cos q de sa valeur tirée de (4), devient

$$ds = -\sin z \frac{\sin \varphi \, d\varphi}{\cos \mathfrak{L} - \cos \varphi \cos z},$$

et s'intègre immédiatement. Elle donne

$$s + c = \operatorname{tg} z . l (\cos \mathfrak{L} - \cos \varphi \cos z).$$

Si on compte le chemin parcouru s à partir du point où la latitude est φ_0, on aura

(10) $$s = \operatorname{tg} z . l \frac{\cos \mathfrak{L} - \cos \varphi \cos z}{\cos \mathfrak{L} - \cos \varphi_0 \cos z},$$

ou

(11) $$\cos \varphi = \cos \mathfrak{L} \operatorname{séc} z - (\cos \mathfrak{L} \operatorname{séc} z - \cos \varphi_0) e^{s . \cot z},$$

équations qui permettent de conclure s de φ seul, ou inversement φ de s seul.

CHAPITRE V

Parallaxe et aberration diurnes

95e Exercice

Étudier les variations de la différence entre les latitudes géographique φ et géocentrique φ' d'un point de la surface terrestre

Solution On sait que (nº 208 du COURS)

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \varphi = \cos^2 f \operatorname{tg} \varphi,$$

en posant, entre l'excentricité e de l ellipsoïde terrestre et f, la relation

$$e = \sin f$$

On tire de la

$$\operatorname{tg} (\varphi - \varphi') = \frac{\operatorname{tg} \varphi \sin^2 f}{1 + \cos^2 f \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

La valeur de φ rendant $(\varphi - \varphi')$ et, par suite, $\operatorname{tg} (\varphi - \varphi')$ maximum ou minimum, lorsque φ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, sur un même méridien, satisfait a l équation

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \text{séc}^2 f,$$

ou

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \text{séc} f$$

Le signe + répond au maximum

$$\operatorname{tg} (\varphi - \varphi') = \tfrac{1}{2} \sin^2 f \ \text{séc} f,$$

le signe — répond au minimum

$$\operatorname{tg} (\varphi - \varphi') = -\tfrac{1}{2} \sin^2 f \ \text{séc} f,$$

qui ont lieu respectivement pour

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{séc} f, \quad \operatorname{tg}\varphi' = \cos f, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\varphi' = 1,$$

et pour

$$\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{séc} f, \quad \operatorname{tg}\varphi' = -\cos f, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\varphi' = 1,$$

c'est-à-dire pour

$$\varphi + \varphi' = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Si l'on pose

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{4} + \varepsilon, \quad \varphi' = \pm \frac{\pi}{4} - \varepsilon,$$

la valeur ε_m de ε correspondante au maximum ou au minimum est donnée par

$$\operatorname{tg}\varepsilon_m = \pm \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} f,$$

sensiblement par

$$\varepsilon_m = \pm (\tfrac{1}{2} f)^2 = \pm (\tfrac{1}{2} e)^2,$$

ou, si l'on remplace e par sa valeur numérique 0,08169,

$$\varepsilon_m = \pm (0{,}04085)^2 = \pm 5' 44'',2.$$

Il est facile de construire les points m, m' du méridien qui répondent au maximum ou au minimum de $\varphi - \varphi'$.

Par le foyer F du méridien *(fig. 70)*, menons la perpendiculaire FA jusqu'au cercle principal et transportons AF en PA'; le rayon OA' aura la direction correspondante à φ', car

$$\operatorname{tg} \mathrm{POA'} = \frac{\mathrm{A'P}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{OP}} = \frac{a \cos f}{a} = \cos f = \operatorname{tg}\varphi',$$

le point m est l'intersection de OA' et de l'ellipse méridienne; intersection qu'on construit en prenant $\frac{\mathrm{PA'_1}}{\mathrm{PA'}} = \frac{a}{b}$, joignant $\mathrm{OA'_1}$ qui coupe le cercle principal en M et menant l'ordonnée de M, laquelle rencontre OA' en m. Le point m' est symétrique de m par rapport à PO.

En m et m', les bissectrices de l'angle formé par la verticale et le rayon terrestre font un angle de 45° avec l'équateur.

96e Exercice.

Établir directement les formules de la parallaxe en négligeant son carré.

Solution : Soient *(fig. 71)* :

O le centre de la terre; O′ un point de sa surface; O (x, y, z), O′ (x', y', z') deux systèmes parallèles d'axes rectangulaires;
(ρ, α, β), (r, A, B) les coordonnées polaires de O′, E vus de O et (r', A', B') les coordonnées polaires de E vu de O′, savoir :

$$\begin{array}{llll} \rho = OO', & \beta = \widehat{zOO'}, & \alpha = \text{angle des plans } zOx, & zOO', \\ r = OE, & B = \widehat{zOE}, & A = \quad \text{id.} \quad zOx, & zOE, \\ r' = O'E, & B' = \widehat{z'O'E}, & A' = \quad \text{id.} \quad z'O'x', & z'O'E. \end{array}$$

Les coordonnées rectilignes correspondantes (ξ, η, ζ) de O′, (x, y, z) de E relatives aux axes O et (x', y', z') de E relatives aux axes O′, sont données par les formules

$$\begin{array}{lll} x' = r' \sin B' \cos A', & x = r \sin B \cos A, & \xi = \rho \sin \beta \cos \alpha, \\ y' = r' \sin B' \sin A', & y = r \sin B \sin A, & \eta = \rho \sin \beta \sin \alpha, \\ z' = r' \cos B', & z = r \cos B, & \zeta = \rho \cos \beta; \end{array}$$

mais on a, entre les coordonnées rectilignes, les relations

$$x' = x - \xi,$$
$$y' = y - \eta,$$
$$z' = z - \zeta,$$

et, par suite, entre les coordonnées polaires, les relations correspondantes

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} r' \sin B' \cos A' & = r \sin B \cos A - \rho \sin \beta \cos \alpha, \\ r' \sin B' \sin A' & = r \sin B \sin A - \rho \sin \beta \sin \alpha, \\ r' \cos B' & = r \cos B \qquad - \rho \cos \beta, \end{array} \right.$$

Posons :

$$\begin{aligned} r' &= r + dr, \\ B' &= B + dB, \\ A' &= A + dA, \end{aligned}$$

les quantités dr, dB, dA étant de petites quantités dont nous négligeons les carrés et produits. A ce degré d'approximation, les équations (1) peuvent s'écrire

$$(2)\ \begin{cases} -r\sin B\sin A.dA + r\cos B\cos A.dB + \sin B\cos A.dr = -\xi, \\ +r\sin B\cos A.dA + r\cos B\sin A\ dB + \sin B\sin A.dr = -\eta, \\ \qquad\qquad -r\sin B.dB + \cos B.dr = -\zeta. \end{cases}$$

Mais le système (2) peut se mettre successivement sous la forme (3)

$$(3)\ \begin{cases} r\sin B.dA = \xi\sin A - \eta\cos A = \rho\sin\beta\sin(A-\alpha), \\ r\cos B.dB + \sin B.dr = -\xi\cos A - \eta\sin A = -\rho\sin\beta\cos(A-\alpha), \\ r\sin B\ dB - \cos B\ dr = \zeta = \rho\cos\beta, \end{cases}$$

et sous la forme (4)

$$(4)\ \begin{cases} r\sin B.dA = \rho\sin\beta\sin(A-\alpha), \\ r\,dB = -\rho\sin\beta\cos(A-\alpha)\cos B + \rho\cos\beta\sin B, \\ dr = -\rho\sin\beta\cos(A-\alpha)\sin B - \rho\cos\beta\cos B. \end{cases}$$

Si nous posons

$$\begin{aligned} g\sin\gamma &= \sin\beta\cos(A-\alpha), \\ g\cos\gamma &= \cos\beta, \\ p &= \frac{\rho}{r}, \end{aligned}$$

les formules (4) deviennent

$$\begin{cases} A' - A = p\sin\beta\sin(A-\alpha)\operatorname{coséc} B, \\ B' - B = pg\sin(B-\gamma), \\ r' - r = -pg\cos(B-\gamma), \end{cases}$$

ou bien

$$(5)\ \begin{cases} A' - A = p\sin\beta\sin(A-\alpha)\operatorname{coséc} B, \\ B' - B = p\cos\beta\sin(B-\gamma)\operatorname{séc}\gamma, \\ r' - r = -\rho\cos\beta\cos(B-\gamma)\operatorname{séc}\gamma, \end{cases}$$

avec

$$(6) \qquad p = \frac{\rho}{r}, \qquad \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \beta \cos (A - \alpha).$$

1° Parallaxe en coordonnées équatoriales. — Si nous prenons pour axes coordonnés, ceux qui servent à définir l'ascension droite $\mathcal{A}$ et la distance polaire $\mathcal{D}$, il faut poser :

$A = \mathcal{A}$ et $A' = \mathcal{A}'$, ascensions droites
$B = \mathcal{D}$ et $B' = \mathcal{D}'$, distances polaires } de E vu de O et O';
$\alpha = \theta$ l'ascension droite de O', ou l'heure sidérale locale pour O';
$\beta = \varphi'$ la colatitude géocentrique de O'.

Les formules précédentes donnent alors

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \varphi' \cos (\mathcal{A} - \theta),$$
$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{A}' - \mathcal{A} &= p \sin \varphi' \sin (\mathcal{A} - \theta) \operatorname{coséc} \mathcal{D}, \\ \mathcal{D}' - \mathcal{D} &= p \cos \varphi' \sin (\mathcal{D} - \gamma) \operatorname{séc} \gamma, \\ r' - r &= -\rho \cos \varphi' \cos (\mathcal{D} - \gamma) \operatorname{séc} \gamma. \end{aligned}\right.$$

2° Parallaxe en coordonnées horizontales. — Si nous prenons, pour axes coordonnés, ceux qui servent à définir l'azimut a et la distance zénithale z, il faut poser :

$A = a$ et $A' = a'$ azimuts
$B = z$ et $B' = z'$ distances zénithales } de E vu de O et O';
$\alpha = 0$ l'azimut de O';
$\beta = \varphi' - \varphi$ différence des colatitudes géographique φ et géocentrique φ' de O',

et les formules générales deviennent

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} (\varphi' - \varphi) \cos a,$$
$$\left\{\begin{aligned} a' - a &= p \sin (\varphi' - \varphi) \sin a \operatorname{coséc} z, \\ z' - z &= p \cos (\varphi' - \varphi) \sin (z - \gamma) \operatorname{séc} \gamma, \\ r' - r &= -\rho \cos (\varphi' - \varphi) \cos (z - \gamma) \operatorname{séc} \gamma. \end{aligned}\right.$$

3° Parallaxe en coordonnées méridiennes. — Si nous prenons, pour axes coordonnés, ceux qui servent à définir l'angle horaire t et la

distance polaire $\mathfrak{L}$, il faut poser :

$$\left.\begin{array}{l} A = t \quad \text{et} \quad A' = t' \ \text{angles horaires} \\ B = \mathfrak{L} \quad \text{et} \quad B' = \mathfrak{L}' \ \text{distances polaires} \end{array}\right\} \text{de E vu de O et O'};$$

$\alpha = 0$ angle horaire de O';

$\beta = \varphi'$ colatitude géocentrique de O',

et l'on a :

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \varphi' \cos t,$$

$$\left\{\begin{array}{l} t' - t = \quad p \sin \varphi' \sin t . \operatorname{coséc} \mathfrak{L}, \\ \mathfrak{L}' - \mathfrak{L} = \quad p \cos \varphi' \sin (\mathfrak{L} - \gamma) \operatorname{séc} \gamma, \\ r' - r = - \rho \cos \varphi' \cos (\mathfrak{L} - \gamma) \operatorname{séc} \gamma. \end{array}\right.$$

REMARQUES.

1° On sait que le rayon ρ du point O' a pour expression très approchée

$$\rho = \rho_0 \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi} = a \sqrt{1 - 2\varepsilon \cos^2 \varphi},$$

en désignant par ρ_0 le rayon équatorial et par e l'excentricité ou ε l'aplatissement du globe terrestre. On en tire, très approximativement encore,

$$\rho = \rho_0 (1 - \varepsilon \cos^2 \varphi).$$

Par suite, la parallaxe horizontale p de E, pour le lieu O', peut s'écrire

$$p = \frac{\rho}{r} = \frac{\rho_0}{r} (1 - \varepsilon \cos^2 \varphi) = P (1 - \varepsilon \cos^2 \varphi);$$

au même degré d'approximation, et en désignant par P la parallaxe horizontale équatoriale de l'astre.

2° Les parallaxes en ascension droite et distance polaire, de beaucoup les plus usitées, sont mises, pour chaque observatoire, sous une forme commode dans les applications numériques.

En prenant pour unité de longueur la distance moyenne a_0 du soleil à la terre, on a

$$p = \frac{\rho}{r} = \frac{\left(\dfrac{\rho}{a_0}\right)}{\left(\dfrac{r}{a_0}\right)} = \frac{\dfrac{\rho}{\rho_0} \cdot \dfrac{\rho_0}{a_0}}{\dfrac{r}{a_0}} = \varpi \frac{R}{D},$$

en appelant ϖ la parallaxe horizontale équatoriale moyenne du soleil, R le rayon terrestre du lieu O′ mesure avec ρ_0 et D la distance OE de l astre au centre de la terre mesuree avec a_0

Il vient alors

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{A}' - \mathcal{A} &= \quad \varpi \frac{R}{D} \sin \varphi' \sin(\mathcal{A} - \theta) \operatorname{cos\acute{e}c} \mathcal{D}, \\ \mathcal{D}' - \mathcal{D} &= \quad \varpi \frac{R}{D} \cos \varphi' \sin(\mathcal{D} - \gamma) \sec \gamma, \\ D' - D &= - \varpi R \cos \varphi' \cos(\mathcal{D} - \gamma) \sec \gamma, \end{aligned}\right.$$

ou bien, en exprimant $\mathcal{A}' - \mathcal{A}$ en secondes de temps et ϖ en secondes d arc,

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{A}' - \mathcal{A} &= \frac{m}{D} \sin(\mathcal{A} - \theta) \operatorname{cos\acute{e}c} \mathcal{D}, \\ \mathcal{D}' - \mathcal{D} &= \frac{n}{D} \sin(\mathcal{D} - \gamma) \operatorname{s\acute{e}c} \gamma, \\ D' - D &= - n \cos(\mathcal{D} - \gamma) \operatorname{s\acute{e}c} \gamma \sin 1'', \end{aligned}\right.$$

avec

$$m = \frac{1}{15} \varpi R \sin \varphi', \qquad n = \varpi R \cos \varphi'$$

Pour l'observatoire de Besançon, en prenant $\varpi = 8'',848$, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= (\bar{1},9688) \cos(\mathcal{A} - \theta), \\ \log m &= \bar{1},6033, \\ \log n &= 0,8106 \end{aligned}$$

3° On a toujours

$$\theta = \mathcal{A} + t = \mathcal{A}' + t',$$

par suite,

$$\mathcal{A}' - \mathcal{A} = - (t' - t)$$

4° La dernière équation (4) peut s'écrire

$$- \frac{1}{\rho} dr = \cos B \cos \beta + \sin B \sin \beta \cos(A - \alpha) = \cos u,$$

ou

$$r' = r - \rho \cos u,$$

en appelant u l'angle EOO′ sous lequel, du centre de la terre, on voit la distance de l'astre à l'observateur. Ce résultat est d'ailleurs évident géométriquement, si l'on projette O′ sur OE en O″, car, à notre degré d'approximation, $O'E = O''E = OE - OO''$.

97e Exercice.

Démontrer géométriquement les formules de la parallaxe, en négligeant son carré.

Solution : Soient *(fig. 72)* :

O le centre de la terre pris pour celui de la sphère céleste;
O′ un point de la surface terrestre de rayon $\rho = OO'$, de colatitude géographique φ et géocentrique φ';
P le pôle nord de la sphère céleste, Z′ et Z les points où cette sphère est rencontrée par la direction OO′ et celle de la verticale en O′;
e la position géocentrique d'un astre E, éloigné de $OE = r$;
Oe' le rayon parallèle à O′E.

Il est clair que P, Z, Z′ sont sur un même grand cercle représentant le méridien du lieu O′; que Z′, e, e' sont aussi sur un même grand cercle déterminé par le plan O′OE et que e' est la position de E vu de O′.

Posons : dans le triangle $ZZ'e$,

$$ZZ' = \varphi' - \varphi = \psi, \quad Z'e = u, \quad \hat{e} = w, \quad ee' = \delta u,$$

nous aurons :

$$(1) \quad \begin{cases} \cos u = \cos\psi \cos z + \sin\psi \sin z \cos a, \\ \sin u \cos w = \cos\psi \sin z - \sin\psi \cos z \cos a, \\ \sin u \sin w = \sin\psi \sin a, \end{cases}$$

a et z désignant les coordonnées horizontales géocentriques de e, savoir :

$$a = \widehat{Z'Ze}, \quad z = Ze.$$

Le triangle $PZ'e$, dans lequel nous posons $\hat{e} = v$, donne de même

$$(2) \quad \begin{cases} \cos u = \cos\varphi' \cos \mathfrak{L} + \sin\varphi' \sin \mathfrak{L} \cos t, \\ \sin u \cos v = \cos\varphi' \sin \mathfrak{L} - \sin\varphi' \cos \mathfrak{L} \cos t, \\ \sin u \sin v = \sin\varphi' \sin t. \end{cases}$$

D'ailleurs, le triangle rectiligne OO'E donne

$$(3)\qquad \delta u = \frac{\rho}{r} \sin u = p \sin u = \frac{R}{D} \sin \varpi \sin u,$$

en définissant p, ϖ, R, D comme dans l exercice précedent

1° La projection du petit arc ee', sur Pe, donne les parallaxes en coordonnées méridiennes

$$\delta \mathfrak{L} = \delta u \cos v, \qquad \sin \mathfrak{L}\, \delta t = \delta u \sin v$$

2° La meme projection donne les parallaxes en coordonnées équatoriales

$$\delta \mathfrak{L} = \delta u \cos v, \qquad \sin \mathfrak{L}\, \delta \mathcal{A} = -\, \delta u \sin v$$

3° La projection de ee' sur Ze, donne les parallaxes en coordonnées horizontales

$$\delta z = \delta u \cos w, \qquad \sin z\, \delta a = \delta u \sin w$$

Ces expressions sont d'une simplicite remarquable En tenant compte des relations (1), (2), (3), il est d ailleurs facile de leur donner la forme usuelle (EXERCICE 96)

98e Exercice

Chercher la courbe diurne apparente decrite sur la sphere celeste pour l observateur O', par un astre E, en vertu de sa parallaxe p

Solution Rapportons les positions apparentes A', P' de E au point M dont la position, sur la sphère céleste de centre O , est définie par A, P, c est a dire se trouve sur la direction O'M parallèle a OE La courbe cherchée etant tres petite, comme p, se trouve sensiblement dans le plan tangent en M a la sphère O' Par M *(fig 73)*, menons le petit cercle perpendiculaire a O z' et le grand cercle contenant O'z' ou parallèle à ZOE Menons en outre les tangentes MX, MY a ces cercles respectivement et du coté des A, B crois

sants. Dans un système quelconque de coordonnées astronomiques, nous aurons, pour les coordonnées rectilignes X, Y de la position apparente e de E,

$$X = \sin B . dA, \quad Y = dB,$$

ou, en vertu des deux premières relations (4) de l'exercice 96e,

$$\begin{aligned} X &= \quad p \sin \beta \sin (A - \alpha), \\ Y &= - p \sin \beta \cos (A - \alpha) \cos B + p \cos \beta \sin B, \end{aligned}$$

et, par suite, en éliminant $(A - \alpha)$,

$$(1) \qquad \frac{X^2}{(p \sin \beta)^2} + \frac{(Y - p \cos \beta \sin B)^2}{(p \sin \beta \cos B)^2} = 1.$$

Soient I la projection de O' sur Oz et H celle de I sur OE; on a évidemment, en appelant ω l'angle IEO ou la parallaxe de l'astre lorsqu'on passe de O en I,

$$\omega = \frac{IH}{r} = \frac{OI . \sin B}{r} = \frac{\rho}{r} \cos \beta \sin B = p \cos \beta \sin B.$$

Menons le rayon O'C de la sphère O', parallèle à IE. Le point C tombera sur le cercle horaire Z'Y de M et l'on aura, pour ses coordonnées X_0, Y_0,

$$X_0 = 0, \quad Y_0 = \omega = p \cos \beta \sin B.$$

Le point C représente, sur la sphère O', la position apparente de E vu de I. Il ne coïncide avec M que si l'une des quantités p, $\cos \beta$, $\sin B$ est nulle. Nous arrivons ainsi au théorème suivant :

A une époque quelconque du mouvement diurne de O', *la position apparente e de l'astre* E *se trouve, dans tout système de coordonnées astronomiques, sur une ellipse déterminée, de centre* C, *dont le grand axe* $p \sin \beta$ *et le petit axe* $p \sin \beta \cos B$ *sont respectivement parallèles à* MX *et* MY.

Cette ellipse a sin B pour excentricité et pour équation, relative aux axes M (X, Y), l'équation (1) dans laquelle X, Y sont les coordonnées courantes.

1° **Parallaxe en ascension droite et distance polaire.** — Pour le système de coordonnées équatoriales, les axes O (x, y, z) sont fixes dans l'espace, comme les directions OE, IE. Les axes O' (x', y', z') sont animés d'une translation définie par le mouvement de O' qui décrit le parallèle terrestre de centre I. Pendant cette translation, les axes O' (x', y', z') restent parallèles à O (x, y, z) et les coordonnées de M, C, relatives à ces axes mobiles, restent invariables. Le point e décrit autour de C, dans le sens direct, l'ellipse σ dont l'équation est

$$\frac{X^2}{(p \sin \varphi')^2} + \frac{(Y - p \cos \varphi' \sin \mathfrak{T})^2}{(p \sin \varphi' \cos \mathfrak{T})^2} = 1, \tag{2}$$

ellipse invariable en position et grandeur, que nous appellerons *ellipse de parallaxe diurne.*

2° **Parallaxe en angle horaire et distance polaire.** — Dans le système des coordonnées méridiennes, les axes O (x, y, z) tournent avec la terre dans le sens direct en entraînant les axes O' (x', y', z') qui leur sont liés invariablement. Ceux-ci peuvent être considérés comme animés de la translation précédente et d'une rotation autour de $O'z'$ égale à celle de la terre autour de Oz. Relativement à ces axes, les points C et M décrivent des parallèles célestes, d'un mouvement uniforme, en un jour sidéral, autour de Z' comme pôle, entraînant avec eux l'ellipse σ sur laquelle se trouve toujours e.

3° **Parallaxe en azimut et distance zénithale.** — Dans le système des coordonnées horizontales, les axes O (x, y, z), O' (x', y', z') tournent aussi avec la terre et e reste sur l'ellipse σ. Mais e se trouve aussi sur l'ellipse σ', variable de position et de grandeur, ayant pour équation

$$\frac{X'^2}{(p \sin \psi)^2} + \frac{(Y' - p \cos \psi \sin z)^2}{(p \sin \psi \cos z)^2} = 1, \tag{3}$$

dans laquelle $\psi = \varphi' - \varphi$ et X', Y' désignent les coordonnées courantes.

Menons par le centre O' de la sphère céleste de l'observateur, des rayons parallèles à l'axe du monde, à la verticale de O', au rayon

terrestre OO′ et à OE. Ces rayons aboutiront sur la sphère respectivement aux points P, Z, Z′ situés sur un même grand cercle et au point M. Il est clair que l'on aura, dans le triangle PZM (*fig.* 74),

$$PZ = \varphi, \qquad ZM = z, \qquad PM = \mathfrak{L},$$
$$\widehat{P} = t, \qquad \widehat{Z} = \pi - a, \qquad \widehat{M} = q,$$

et que

$$Z'M = u,$$

en conservant les notations de l'exercice 96.

L'équation (3) de l'ellipse σ' est rapportée aux tangentes MX′, MY′, au petit cercle horizontal et au cercle vertical ZM qui se coupent rectangulairement en M, ces tangentes étant prises dans le sens des a et z croissants.

Il est clair aussi que l'équation (2) de l'ellipse σ est rapportée aux tangentes MX, MY au petit cercle de pôle P et au cercle horaire PM qui se coupent rectangulairement en M, ces tangentes étant prises dans le sens des $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{L}$ croissants.

La position apparente e de l'astre E est un point de rencontre de ces deux ellipses.

En général, les axes de l'ellipse σ sont de l'ordre de p et ceux de l'ellipse σ' sont de l'ordre de $p \sin(\varphi' - \varphi)$, c'est-à-dire beaucoup plus petits, même nuls si on néglige l'aplatissement de la terre. Dans cette hypothèse, σ' se réduit à son centre ayant pour coordonnées

$$X'_0 = 0, \qquad Y'_0 = p \sin z,$$

et se confondant avec e à l'intersection de σ avec le vertical ZM prolongé.

REMARQUE.

Il est clair que la trajectoire relative de forme et position invariable, décrite par e dans le plan tangent en M, par rapport aux axes M (X′, Y′), s'obtiendrait en éliminant a, z entre les trois relations

$$\frac{X'}{p} = \sin\psi \sin a,$$
$$\frac{Y'}{p} = \cos\psi \sin z - \sin\psi \cos z \cos a,$$
$$\cos \mathfrak{L} = \cos\varphi \cos z - \sin\varphi \sin z \cos a,$$

mais cette trajectoire est beaucoup moins simple qu'une ellipse.

99e Exercice.

Passer directement des coordonnées X, Y *aux coordonnées* X', Y' *de e.*

Solution : Sur la figure 74 de l'exercice précédent, on voit qu'une rotation q autour de M des axes M (X, Y), dans le sens des azimuts croissants par rapport à ZM, amène MX en opposition directe avec MX', et MY en coïncidence avec MY'. On a donc, pour la transformation des coordonnées de e, les formules connues

$$X' = -X \cos q - Y \sin q,$$
$$Y' = -X \sin q + Y \cos q;$$

mais on voit, par les relations (4) de l'exercice 96e, que

$$\frac{X}{p} = -\sin \varphi' \sin t,$$
$$\frac{Y}{p} = -\sin \varphi' \cos \mathfrak{L} \cos t + \cos \varphi' \sin \mathfrak{L},$$

donc

$$\frac{X'}{p} = \sin \varphi' (\sin t \cos q + \cos t \sin q \cos \mathfrak{L}) - \cos \varphi' \sin q \sin \mathfrak{L},$$
$$\frac{Y'}{p} = \sin \varphi' (\sin t \sin q - \cos t \cos q \cos \mathfrak{L}) + \cos \varphi' \cos q \sin \mathfrak{L},$$

mais, en vertu de formules connues de la trigonométrie sphérique (EXERCICE 2e), le triangle PZM donne :

$$\sin q \sin \mathfrak{L} = \sin a \sin \varphi,$$
$$\sin t \cos q + \cos t \sin q \cos \mathfrak{L} = \sin a \cos \varphi,$$
$$\sin t \sin q - \cos t \cos q \cos \mathfrak{L} = \sin \varphi \sin z - \cos \varphi \cos z \cos a,$$
$$\cos q \sin \mathfrak{L} = \cos \varphi \sin z + \sin \varphi \cos z \cos a.$$

Par suite,

$$\frac{X'}{p} = \sin (\varphi' - \varphi) \sin a,$$
$$\frac{Y'}{p} = \cos (\varphi' - \varphi) \sin z - \sin (\varphi' - \varphi) \cos z \cos a,$$

valeurs qui résultent effectivement des relations générales (4) de l'exercice 96e.

100e Exercice.

Chercher la courbe résultante décrite par un astre, en vertu de la parallaxe et de l'aberration diurnes.

Solution : Le phénomène de l'aberration a été étudié dans le COURS. Il nous suffira d'en rappeler ici le caractère essentiel, dans toute sa généralité.

Supposons connus les mouvements, dans l'espace, d'un astre et de l'observateur, rapportés à trois axes rectangulaires fixes. Soient E et O leurs positions respectives à l'époque t. Parmi les faisceaux lumineux de rayons parallèles, émis par E, à cette époque, dans toutes les directions, un seul atteindra l'observateur en O' à l'époque t', postérieure à t de la quantité τ. Il est facile de déterminer τ et la direction EO' (*fig.* 75).

Désignons par x', y', z' les coordonnées de O' fonctions connues de t', par X, Y, Z celles de E, autres fonctions connues de t, par V la vitesse de la lumière ; nous avons la relation

$$(1)\quad (V\tau)^2 = (X - x')^2 + (Y - y')^2 + (Z - z')^2 = f(t, t'),$$

f étant une fonction connue aussi de t et t' ou t et τ. Cette relation donne τ ou t' et, par suite, la position de O' dès que t est donné.

Sur la tangente en O' à la trajectoire OO' de l'observateur, portons, en sens contraire de sa vitesse v' à l'époque t', une longueur $O'O_1 = v'\tau$ et joignons O_1E. L'observateur, à l'époque t', ne verra pas l'astre dans la direction O'E' sur laquelle il se trouve réellement, mais dans la direction O_1E.

Si la durée τ nécessaire à la lumière pour franchir la distance EO', tandis que l'observateur décrit l'arc OO' de sa trajectoire, est assez faible pour que les points O et O_1 se confondent sensiblement, le résultat précédent peut s'énoncer ainsi :

La direction apparente de l'astre à l'époque t' est sa direction vraie à l'époque $t' - \tau$.

Cet énonce ne s applique pas a l aberration diurne des etoiles pour lesquelles τ compte plusieurs années Il s applique sensiblement aux planetes pour lesquelles τ est faible et compte seulement quelques minutes

Si C est le centre de la terre, Cz son axe de rotation, les points O_1 et O decrivent, en vertu du mouvement diurne, deux cercles de même centre I sur Cz et de meme plan perpendiculaire à Cz Si nous transportons les deux cônes ayant ces cercles respectifs pour bases et E pour sommet, de telle sorte que E occupe le centre de la sphère céleste ou l œil de l observateur, ils couperont cette sphère le premier suivant la courbe résultante cherchée, le deuxième suivant la courbe de parallaxe Ces courbes sont deux ellipses concentriques semblables et semblablement placées

Pour une etoile dont la parallaxe diurne est toujours insensible, l ellipse resultante se confond avec l'ellipse d aberration Pour une planète, l ellipse résultante se confond sensiblement avec l'ellipse de parallaxe, mais la position vraie de la planete sur cette ellipse a l epoque t n apparait a l'observateur qu a l epoque $t + \tau$

101e Exercice

Demontrer geometriquement, d un seul coup, les formules de parallaxe et d'aberration diurnes

Solution Si l on se borne aux quantités du premier ordre, il est facile d'établir ces formules en quelques mots

Soient *(fig 76)*

O le centre de la terre,

Oz son axe de rotation dans le sens de la flèche f,

O' un observateur de colatitude géocentrique φ', situé a la surface sur le parallèle de centre m,

O'a la perpendiculaire abaissée de O' sur le cercle horaire zmy de l astre,

E ($\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$) un astre quelconque

1° Pour passer de O en O', on peut suivre la ligne brisee OmaO

formée des trois droites rectangulaires dont les longueurs

$$Om = \rho' \cos \varphi', \quad ma = \rho' \sin \varphi' \cos (\mathcal{A} - \theta),$$
$$aO' = \rho' \sin \varphi' \sin (\mathcal{A} - \theta),$$

s'expriment immédiatement en fonction de φ', de $\mathcal{A}$, de l'heure sidérale θ en O' et du rayon terrestre ρ' de O'. Au lieu d'imaginer qu'un observateur fictif passe ainsi du centre de la Terre à la surface O' pour évaluer le changement dans la direction visuelle de l'astre, laissons cet observateur immobile en O et imaginons que l'étoile se déplace suivant la ligne brisée $Em'a'E'$ dont les côtés sont égaux, parallèles à ceux de $OmaO'$, mais de sens contraire. La direction OE' sera parallèle à $O'E$ et, à notre degré d'approximation, les parallaxes seront, en désignant par r la distance OE,

$$(1)\quad \delta\mathcal{A} = \widehat{a'IE'} = \frac{a'E'}{a'I} = \frac{aO'}{r \sin \mathfrak{L}} = \frac{\rho'}{r} \sin \varphi' \sin (\mathcal{A} - \theta) \operatorname{cos\acute{e}c} \mathfrak{L},$$

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta\mathfrak{L} &= \widehat{EOa'} = \widehat{EOm'} - \widehat{a'Om'} \\ &= \frac{\rho'}{r} \cos \varphi' \sin \mathfrak{L} - \frac{\rho'}{r} \sin \varphi' \cos (\mathcal{A} - \theta) \cos \mathfrak{L}. \end{aligned} \right.$$

Si, dans $\delta\mathfrak{L}$, l'on supprime le premier terme, indépendant de θ et répondant au déplacement Om, il ne reste plus qu'un terme périodique avec θ et l'on a les formules de parallaxe lorsqu'on passe de m à un point quelconque du parallèle de O'.

Si, dans ces dernières formules, on remplace $\frac{\rho'}{r}$ par le rapport $\frac{v}{V}$ de la vitesse diurne v de O' à la vitesse V de la lumière et θ par $\theta - \frac{\pi}{2}$, il est clair qu'on a les formules de l'aberration diurne.

2° La démonstration suivante est encore plus simple. Considérons la sphère céleste géocentrique O, de rayon OO' et le triangle $PO'e$ déterminé sur elle par les directions Oz, OO', OE allant du centre O de la terre au pôle nord, à l'observateur O' et à l'astre E (*fig. 77*). Dans ce triangle,

$$O'e = u, \quad PO' = \varphi', \quad Pe = \mathfrak{L}, \quad \widehat{O'Pe} = t, \quad \widehat{PeO'} = v,$$

menons par E une droite EE′ égale et parallèle à OO′, mais de sens contraire; la direction OE′ est parallèle à la direction O′E et coupe la sphère en e'. Menons, en outre, l'arc de parallèle ea. Le petit triangle eae' peut être considéré comme rectiligne, rectangle en a et donne immédiatement :

$$ee' = \delta u = \frac{\rho'}{r}\sin u, \quad ea = \delta \mathcal{A}\sin \mathcal{D} = \delta u \sin v, \quad ae' = \delta\mathcal{D} = \delta u \cos v,$$

mais le triangle PeO′ donne, d'autre part,

$$\sin u \sin v = \sin \varphi' \sin t,$$
$$\sin u \cos v = \cos \varphi' \sin \mathcal{D} - \sin \varphi' \cos \mathcal{D} \cos t.$$

On conclut :

$$(1)\quad \delta\mathcal{A} = \frac{\rho'}{r}\sin\varphi' \sin t \operatorname{cos\acute{e}c} \mathcal{D} = \frac{\rho'}{r}\sin\varphi' \sin(\mathcal{A} - \theta) \operatorname{cos\acute{e}c} \mathcal{D},$$

$$(2)\quad \delta\mathcal{D} = \frac{\rho'}{r}\cos\varphi' \sin\mathcal{D} - \frac{\rho'}{r}\sin\varphi' \cos(\mathcal{A} - \theta)\cos\mathcal{D},$$

formules de parallaxes qui se transforment, comme nous l'avons dit, en formules d'aberration.

REMARQUE.

Nous n'avons considéré, dans cet exercice, que les parallaxes en ascension droite et déclinaison. Les mêmes considérations sont applicables aux parallaxes dans les autres systèmes de coordonnées qui se déduisent d'ailleurs immédiatement de $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{D}$ par une simple transformation indiquée dans les exercices précédents.

3° L'ellipse de parallaxe résulte immédiatement aussi des équations (1), (2). Mais elle s'obtient directement comme symétrique, relativement à E, de l'intersection du cône ayant E pour sommet et le parallèle terrestre de O′ comme base, avec une sphère céleste de centre E, de rayon Em.

Cette sphère peut se remplacer en m par son plan tangent. L'angle

$O'EO'_1$, correspondant à deux positions opposées de O' sur son parallèle, est très petit et, en négligeant son carré, bissecté par Em. La courbe d'intersection est donc une ellipse dont le centre répond à la direction mE, le grand axe $\frac{\rho'}{r}\sin\varphi'$ à l'angle $\widehat{O'EO'_1}$ lorsque l'angle horaire t de l'étoile est $\pm 90°$, le petit axe $\frac{\rho'}{r}\sin\varphi'\cos\mathfrak{L}$ à cet angle en E lorsque $t = 0°$ ou $180°$.

L'ellipse d'aberration s'obtient de la même manière.

LIVRE IV

LE SOLEIL

CHAPITRE I

Mouvement diurne du Soleil.

102e Exercice.

On détermine simultanément, à midi vrai, les longueurs d'ombre solaire l, l' *des gnomons de hauteur* h, h', *en deux points* A, A' *situés sur un même méridien et à une distance* d *connue. Déduire de là le rayon terrestre* R.

Solution : L'observation au gnomon *(fig. 78)*, donne les distances zénithales z, z' du soleil, en A et en A', par les relations

$$(1) \qquad \operatorname{tg} z = \frac{l}{h}, \quad \operatorname{tg} z' = \frac{l'}{h'}.$$

Si c'est au même midi vrai que répondent les distances zénithales z, z' du soleil aux points A, A' d'un même méridien, on aura la différence de latitude de ces points par la formule

$$(2) \qquad \varphi - \varphi' = z - z' = \alpha.$$

Connaissant α exprimé en degrés, d la distance AA', on aura le rayon terrestre par la relation

$$(3) \qquad \mathrm{R} = \frac{180^{\circ} . d}{\pi . \alpha}.$$

La première mesure de la Terre a été faite par Eratosthènes à l'aide de cette méthode. Elle est décrite avec détails dans le *Cours de M. Faye*, t. I, p. 240.

103e Exercice.

En un jour et en un lieu donnés, sous quel angle, à quelle hauteur et à quelle heure vraie le centre du soleil traverse-t-il un vertical ZV *d'azimut donné* a?

Solution : On résout ce problème comme s'il s'agissait d'une étoile (voir le 54e exercice), en prenant d'abord pour la déclinaison $\mathfrak{D}$ du Soleil sa valeur moyenne pendant le jour considéré. Ayant trouvé une première valeur pour l'angle horaire du Soleil ou l'heure vraie t, on recommence le calcul en prenant pour $\mathfrak{D}$ la déclinaison correspondante à cette valeur de t, et ainsi de suite jusqu'à ce que les résultats ne changent plus.

104e Exercice.

On veut pointer une lunette de théodolite à champ circulaire 2γ, *sur le Soleil de coordonnées horizontales* a, z. *Entre quelles limites peuvent varier les coordonnées* a_0, z_0 *de l'axe optique déterminé par les centres du champ et de l'objectif; en d'autres termes, quelle doit être la précision du calage pour que le Soleil soit entièrement visible?*

Solution : Soient *(fig. 79) :*

Z le zénith de l'observateur;
C, S les centres du champ et du Soleil;
$\delta = \text{CS}$ leur distance angulaire;
Δ le demi-diamètre apparent du Soleil.

Posons :

$$a_0 = a + \alpha, \qquad z_0 = z + \zeta.$$

Le triangle sphérique ZCS dans lequel

$$\text{CS} = \delta, \quad \text{CZ} = z_0, \quad \text{ZS} = z, \quad \widehat{\text{Z}} = \alpha,$$

donne

$$(1)\quad \cos\delta = \cos z \cos z_0 + \sin z \sin z_0 \cos\alpha = \cos\zeta - 2\sin z \sin z_0 \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Pour que le Soleil soit entièrement visible, il faut la condition

$$(2) \qquad \delta + \Delta \leq \gamma \quad \text{ou} \quad \delta \leq \gamma - \Delta,$$

qui contient celle-ci : $\Delta < \gamma$, évidente d'ailleurs *a priori*. L'inégalité (2) dont les membres sont toujours positifs et notablement inférieurs à 90°, équivaut à la condition

$$(3) \qquad \cos\delta \geq \cos(\gamma - \Delta),$$

ou

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} \leq \frac{\cos\zeta - \cos(\gamma-\Delta)}{2\sin z \sin(z+\zeta)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\gamma+\zeta-\Delta)\sin\frac{1}{2}(\gamma-\zeta-\Delta)}{\sin z\sin(z+\zeta)},$$

qui, avec une approximation suffisante, peut s'écrire

$$(4) \qquad \alpha^2 \leq \frac{(\gamma-\Delta+\zeta)(\gamma-\Delta-\zeta)}{\sin^2 z} = \frac{(\gamma-\Delta)^2-\zeta^2}{\sin^2 z}.$$

La condition (4) est évidente géométriquement, si l'on abaisse l'arc SM perpendiculaire sur ZC, et si l'on considère comme rectiligne le triangle rectangle SMC dans lequel

$$SC = \delta, \quad MC = \zeta, \quad SM = \alpha \sin z.$$

Ce triangle donne effectivement

$$\delta^2 = \zeta^2 + \alpha^2 \sin^2 z,$$

ce qui ramène la condition (2) à la forme (4).

L'inégalité (4) donne les limites égales et contraires de α correspondantes à chaque valeur de ζ. Les limites de ζ sont d'ailleurs fournies par la condition

$$(5) \qquad \zeta^2 < (\gamma - \Delta)^2,$$

sans laquelle l'inégalité (4) serait impossible.

REMARQUE.

La même question sera résolue pour une étoile si l'on fait $\Delta = 0$ dans les formules précédentes.

105ᵉ Exercice.

Connaissant, à un certain moment, la déclinaison $\mathfrak{D}$ du Soleil S et sa distance zénithale z pour un lieu de latitude φ, calculer le temps que met cet astre à traverser le fil horizontal d'une lunette pointée sur lui, à ce moment.

Solution : Si l'on désigne par t l'angle horaire du centre du Soleil au moment considéré, on a, par le triangle PZS,

$$\cos z = \sin\varphi \sin\mathfrak{D} + \cos\varphi \cos\mathfrak{D} \cos t. \tag{1}$$

Pendant que le Soleil traverse son almicantarat ou le fil de la lunette, $\mathfrak{D}$ peut être regardé comme constant. La différentiation de l'équation (1) donne donc

$$\sin z.\delta z = \cos\varphi \cos\mathfrak{D} \sin t.\delta t.$$

Mais le même triangle donne, en désignant par a l'azimut du Soleil,

$$\cos\mathfrak{D} \sin t = \sin a.\sin z,$$

par suite,

$$\delta z = \cos\varphi.\sin a.\delta t, \tag{2}$$

si 2Δ est le diamètre apparent du Soleil, θ le temps qu'il met à traverser le fil, on aura

$$\theta = \frac{2\Delta}{\cos\varphi \sin a}, \tag{3}$$

a se calculera d'ailleurs aisément au moyen de φ, $\mathfrak{D}$, z, par la formule

$$\sin\mathfrak{D} = \sin\varphi \cos z - \cos\varphi \sin z \cos a. \tag{4}$$

REMARQUES.

1° Si l'on connaît trois des quatre quantités θ, Δ, φ, a, la quatrième est déterminée par la formule (3).

Dans le cas particulier de $z = 90°$, cette formule donnera le temps mis par le disque du Soleil à traverser l'horizon, soit à son lever, soit

à son coucher. Si l'on veut, dans ce cas, tenir compte de la réfraction horizontale r, il faudra prendre $z = 90^\circ + r$.

2° Dans une observation du Soleil au sextant, le temps 2θ, que met l'image doublement réfléchie de l'astre à traverser l'image vue directement sur un miroir horizontal ou sur un bain de mercure, correspond à une variation de distance zénithale égale à 4Δ. Si l'on a mesuré ce temps en observant les époques des contacts extérieurs des deux images, on aura

$$\theta = \frac{2\Delta}{\cos\varphi \sin a},$$

pour déterminer Δ; et réciproquement la mesure préalable de Δ permet de calculer 2θ à un moment donné.

106e Exercice.

Pour un lieu de latitude φ et un jour donné, calculer le temps θ que met le Soleil à traverser un vertical d'azimut A *déterminé par le fil vertical d'un théodolite.*

Solution : Soient *(fig. 80) :*

Z le zénith de l'observateur ;

S le centre du Soleil, $t = \widehat{ZPS}$, $a = \widehat{MZS}$ son angle horaire et son azimut lors du premier contact en m du disque avec le vertical ZV d'azimut $A = \widehat{MZV}$;

S′ le centre du Soleil, $t' = \widehat{ZPS'}$, $a' = \widehat{MZS'}$ son angle horaire et son azimut lors du deuxième contact en m' du disque avec ZV.

Les arcs de grand cercle Sm, S′m' sont égaux au demi-diamètre apparent Δ du Soleil pour le jour donné et perpendiculaires à ZV. Les distances polaires PS, PS′ du Soleil sont égales très sensiblement, vu la faible durée de θ, et complémentaires de la déclinaison $\mathfrak{D}$ du Soleil au moment d'un contact. Il est d'ailleurs évident que

$$15.\theta = t' - t.$$

Pour calculer t considérons les deux triangles sphériques PZS et ZmS.

Posons :

$$180^\circ - a = \widehat{PZS} = x, \quad \widehat{mZS} = y, \quad ZS = z,$$

nous aurons d'abord

$$(1) \qquad x - y = 180^\circ - A,$$

puis, par le triangle PZS,

$$(2) \qquad \sin \mathfrak{D} = \sin \varphi \cos z + \cos \varphi \sin z \cos x,$$

et, par le triangle ZmS,

$$(3) \qquad \sin \Delta = \sin z \sin y,$$

les équations (1), (2), (3) déterminent x, y, z en fonction de A, φ, $\mathfrak{D}$, après quoi t est donné par la formule

$$(4) \qquad \cos z = \sin \varphi \sin \mathfrak{D} + \cos \varphi \cos \mathfrak{D} . \cos t.$$

on aura t' par un calcul analogue.

On prendra d'abord, dans la *Connaissance des temps,* pour $\mathfrak{D}$ la valeur moyenne de la déclinaison du Soleil, le jour considéré, ce qui conduira à des valeurs déjà très approchées de t, t'. Si l'on veut une grande exactitude, on recommencera le calcul en prenant pour $\mathfrak{D}$ la déclinaison du Soleil à l'une des époques t, t' ou mieux à l'époque moyenne $\frac{1}{2}(t + t')$.

Dans le cas particulier de $A = 90^\circ$ ou lorsque le vertical ZV est le premier vertical, le calcul est très simple. On a successivement :

$$- y = 90^\circ - x,$$

$$- \sin \Delta = \sin z \cos x,$$

$$(5) \qquad \sin \mathfrak{D} = \sin \varphi \cos z - \cos \varphi \sin \Delta$$

$$= \sin^2 \varphi \sin \mathfrak{D} + \sin \varphi \cos \varphi \cos \mathfrak{D} \cos t - \cos \varphi \sin \Delta,$$

ou, en divisant (5) par $\cos \varphi$,

$$(6) \qquad \sin \mathfrak{D} \cos \varphi = \sin \varphi \cos \mathfrak{D} \cos t - \sin \Delta,$$

d'où

$$(7) \qquad \cos t = \operatorname{tg} \mathfrak{D} \cot \varphi + \sin \Delta \operatorname{cos\acute{e}c} \varphi \operatorname{s\acute{e}c} \mathfrak{D}.$$

La formule (6) peut d'ailleurs s'obtenir directement en prolongeant

l'arc mS jusqu'à sa rencontre en N avec le méridien PZ, et remarquant que, si $A = 90°$, les côtés du triangle PSN sont $PN = \varphi$, $PS = 90° - \mathfrak{D}$, $NS = 90° + \Delta$, tandis que l'angle $NPS = 180° - t$. Ce triangle donne, en effet, immédiatement la relation (6) si on exprime le cosinus de NS en fonction des deux autres côtés et de l'angle qu'ils comprennent.

On verra de même que, pour $A = 90°$,

$$\cos t' = \operatorname{tg} \mathfrak{D} \cot \varphi - \sin \Delta \operatorname{cos\acute{e}c} \varphi \operatorname{s\acute{e}c} \mathfrak{D},$$

on tire de là

$$\cos t - \cos t' = 2 \sin \tfrac{1}{2}(t' + t) \sin \tfrac{1}{2}(t' - t) = 2 \sin \Delta . \operatorname{cos\acute{e}c} \varphi . \operatorname{s\acute{e}c} \mathfrak{D},$$

c'est-à-dire

$$\theta = \frac{2\Delta . \operatorname{cos\acute{e}c} \varphi . \operatorname{s\acute{e}c} \mathfrak{D}}{15 . \sin \tau},$$

en posant

$$\tau = \tfrac{1}{2}(t + t').$$

Solution approchée. — Nous venons de donner une solution rigoureuse, mais on obtient de suite une solution très approchée en remarquant que si l'on trace les petits arcs de parallèle $S\gamma S'$ et de grand cercle $S\alpha S'$, ces arcs se confondent sensiblement, de sorte que le point γ où le centre du Soleil traverse ZV et le point α où l'arc de grand cercle $S\alpha S'$ coupe SV sont à une distance $\alpha\gamma$ négligeable.

Les triangles sphériques $S\alpha m$, $S'\alpha m'$ sont égaux comme rectangles en m, m', ayant les angles égaux en α, et les côtés Sm, $S'm'$ égaux. Le point α est donc le milieu de l'arc $S\alpha S'$ et l'on a

$$Sm = S\alpha . \cos q,$$

par suite,

$$2\Delta = S\alpha S' . \cos q = S\gamma S' . \cos q,$$

en désignant par q l'angle parallactique du Soleil lorsqu'il est en γ. Si donc on a calculé cet angle, toujours de même signe que A, par la formule

$$\sin q = \cos \varphi \operatorname{s\acute{e}c} \mathfrak{D} \sin A,$$

que donne immédiatement le triangle $PZ\gamma$, on aura

$$\theta = \frac{S\gamma S'}{15 \cos \mathfrak{D}} = \frac{2\Delta}{15 \cos q \cos \mathfrak{D}}.$$

REMARQUES.

Le cercle horaire $P\alpha$ prolongé coupe le parallèle $S\gamma S'$ en son milieu β. Le triangle $\alpha\beta\gamma$ est très petit; il est d'ailleurs facile à résoudre. L'angle γ est connu et égal à $90° - q$; l'angle β est droit et l'on a pour le côté $\alpha\beta$

$$\alpha\beta = P\beta - P\alpha = PS - P\alpha.$$

Mais dans le triangle sphérique $P\alpha S$, rectangle en α, on a

$$PS = 90° - \mathfrak{D} = \mathfrak{L}, \quad P = \tfrac{1}{2}(t' - t) = \frac{15}{2}\,\theta,$$

il donne

$$\text{tg}\, P\alpha = \text{tg}\, \mathfrak{L}.\cos P;$$

par suite, la série

$$P\alpha = \mathfrak{L} - \text{tg}^2\, \tfrac{1}{2} P.\sin 2\mathfrak{L} + \ldots,$$

et sensiblement

$$\alpha\beta = \tfrac{1}{4} P^2 \sin 2\mathfrak{L} = \tfrac{1}{4} P^2 \sin 2\mathfrak{D},$$

on peut donc résoudre le triangle $\alpha\beta\gamma$.

Le Soleil traverse le vertical en γ à l'époque t_0, aisément calculable (EXERCICE 103); il est en β à l'époque $\frac{1}{2}(t + t')$ et

$$t_0 = \tfrac{1}{2}(t + t') \pm \frac{\beta\gamma}{15 \cos \mathfrak{D}} = \tau + \frac{\alpha\beta.\text{tg}\, q}{15 \cos \mathfrak{D}},$$

ou

$$t_0 = \tau + \frac{15}{8}\,\theta^2.\sin \mathfrak{D}.\text{tg}\, q.$$

107ᵉ Exercice.

L'axe optique d'une lunette de théodolite est dirigé sur le point connu A (a, z) du ciel, après une rotation préalable i du fil horizontal dans le plan du réticule. Étudier le passage du soleil dans la lunette relativement à ce fil.

Solution : Cet exercice est une généralisation des exercices précédents. Nous avons vu (EXERCICE 55) comment les coordonnées horizontales a, z du point A permettent de calculer : 1° Les coordonnées méridiennes t, p du pôle Q du grand cercle qq' déterminé sur la sphère céleste par le plan du fil considéré et de l'axe optique de la lunette

(*fig. 81*); 2° l'arc $m = \mathrm{AB}$ ou la position de A sur qq', relativement au point de rencontre B de ce grand cercle avec PQ prolongé. Nous supposerons donc m, t, p connus, ainsi que les coordonnées $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ du centre du Soleil et son diamètre apparent 2Δ. Nous supposerons en outre $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$, Δ invariables pendant la durée du passage.

Soient :

S une position quelconque du Soleil à une époque locale solaire vraie θ, voisine du passage;

τ l'angle $\widehat{\mathrm{QPS}}$ compté à partir de PQ positivement vers l'ouest comme l'angle horaire θ ou $\widehat{\mathrm{ZPS}}$ à partir de PZ;

d la distance correspondante de S au grand cercle qq'.

Le triangle sphérique PQS dans lequel nous posons

$$\mathrm{PQ} = p, \qquad \mathrm{PS} = \mathcal{D}, \qquad \mathrm{QS} = 90^\circ - d,$$
$$\widehat{\mathrm{QPS}} = \tau, \qquad \widehat{\mathrm{PQS}} = u, \qquad \widehat{\mathrm{PSQ}} = v,$$

donne les relations

$$\sin d = \cos p \cos \mathcal{D} + \sin p \sin \mathcal{D} \cos \tau, \tag{1}$$
$$\cos \mathcal{D} = \cos p \sin d + \sin p \cos d \cos u, \tag{2}$$
$$\cos p = \cos \mathcal{D} \sin d + \sin \mathcal{D} \cos d \cos v. \tag{3}$$

On a d'ailleurs

$$\theta = t + \tau,$$

une valeur approchée de θ calculée préalablement avec a, z, $\mathcal{D}$, par le triangle PZA, détermine le signe de $(\theta - t)$ ou τ.

Époques des contacts du disque solaire avec le fil et du passage du centre. — Si, dans la formule (1), on pose successivement :

$$d = \pm \Delta, \qquad d = 0, \qquad d = \mp \Delta,$$

en prenant les signes supérieurs ou inférieurs suivant que τ est positif ou négatif, et, si l'on en tire les valeurs correspondantes τ_1, τ_0, τ_2 de τ, les heures solaires vraies,

$$\theta_1 = t + \tau_1, \qquad \theta_0 = t + \tau_0, \qquad \theta_2 = t + \tau_2,$$

seront celles du premier contact, du passage du centre et du deuxième contact en c_1, I et c_2.

Positions des points c_1, I, c_2 sur le fil et sur le Soleil. — Si, de même, dans les formules (2), (3) on fait successivement

$$d = \pm \Delta, \quad d = 0, \quad d = \mp \Delta,$$

en prenant les signes de d d'après celui de τ, et si l'on en tire les valeurs correspondantes u_1, u_0, u_2 de u, v_1, v_0, v_2 de v, on aura les positions de c_1, c_2 sur le disque solaire en portant sur sa circonférence, à partir du point nord n et à l'est, les arcs

$$nc_1 = 180^\circ + v_1, \quad nc_2 = v_2.$$

Les positions de c_1, I, c_2 sur le fil, rapportées à A, s'obtiendront en portant dans le sens convenable

$$Ac_1 = m + u_1 - \pi, \quad AI = m + u_0 - \pi, \quad Ac_2 = m + u_2 - \pi.$$

L'angle sous lequel le Soleil traverse le fil est d'ailleurs v_0.

REMARQUES.

1° Pendant la durée de sa révolution diurne, sous la distance polaire $\mathfrak{L}$ supposée fixe, le Soleil prend des positions symétriques deux à deux, par rapport au grand cercle PQ qu'il traverse aux heures vraies t, $t + \pi$, pour lesquelles sa distance au point Q atteint son minimum ou son maximum qui sont égaux, en valeur absolue, respectivement à $(\mathfrak{L} - p)$, $(\mathfrak{L} + p)$.

A cette symétrie, correspondent pour τ, u, v deux valeurs égales et de signes contraires fournies par les équations (1), (2), (3) pour chaque valeur de d. Prises ensemble, les valeurs positives de τ_1, τ_0, τ_2 donnent les contacts et le passage à l'ouest de PQ; les valeurs négatives donnent les contacts et le passage symétriques à l'est de PQ. Les premiers ou les derniers sont seuls visibles dans la lunette suivant que A est à l'ouest ou à l'est de B, c'est-à-dire suivant que m, calculé suivant l'exercice 55°, est positif ou négatif.

On voit d'ailleurs aisément que, pour certaines valeurs des données, les 4 contacts peuvent se réduire à 3, 2, 1, 0.

2° Pour que les trois points c_1, I, c_2 soient effectivement visibles dans une lunette à champ circulaire de diamètre 2γ, il faut en outre que l'on ait

$$\gamma > Ac_1, \quad AI, \quad Ac_2.$$

3° Si, dans l'exercice actuel, on suppose $i = 0$, $i = 90°$, on retombe sur les deux précédents.

4° Avec une approximation suffisante, on peut traiter le problème en remplaçant la sphère par son plan tangent en A ou le plan du réticule.

5° En faisant $\Delta = 0$, dans ce qui précède, on obtiendra les diverses circonstances du passage d'une étoile.

108° Exercice.

Étudier les circonstances du passage d'une étoile ou du Soleil, de position connue S (Ꭿ, 𝔇), *à travers le réticule circulaire d'une lunette astronomique pointée sous une direction connue.*

Solution : On donne le nom de *réticule circulaire* à une plaque de verre transparent, à faces parallèles, placée dans le plan focal principal de la lunette et sur laquelle une circonférence opaque est gravée avec soin.

L'axe optique de la lunette est alors, par définition, la droite joignant le centre du cercle réticulaire au centre optique O de l'objectif.

Prenons le point O pour centre de la sphère céleste et soient *(fig. 82)* :

P le pôle de cette sphère;

Z le zénith de l'observateur; φ sa colatitude;

A le point de la sphère située sur l'axe optique;

m le petit cercle de pôle A, découpé sur la sphère par le cône ayant O pour sommet et le cercle réticulaire pour base;

S_1, S'_1 les positions du centre du Soleil lorsque son disque touche extérieurement m aux points c_1, c'_1;

S_2, S'_2 ses positions de contact intérieur en c_2, c'_2;

t_1, t'_1 et t_2, t'_2 les angles horaires de S_1, S'_1 et S_2, S'_2;

Δ le demi-diamètre apparent du Soleil au moment du passage;

γ le demi-diamètre angulaire Ac_1 du cercle réticulaire;

a, z les coordonnées horizontales et t, p les coordonnées méridiennes correspondantes du point A;

q l'angle parallactique $\widehat{PAZ}$ du point A.

Nous supposons connues les quantités $\mathcal{A}$, $\mathcal{L}$, Δ, γ, φ, a, z et nous nous proposons de calculer d'abord les circonstances du passage du Soleil.

1° **Calcul de t, p, q.** — Le triangle PAZ dans lequel on connaît les côtés $PZ = \varphi$, $ZA = z$, et l'angle $\widehat{Z} = 180° - a$ donne immédiatement t, p, q par des formules qu'il est inutile de reproduire ici.

A l'époque solaire vraie t, la distance des centres du Soleil et du réticule atteint son minimum égal à la valeur absolue d de $(\mathcal{L} - p)$. En comparant d aux valeurs absolues s et δ de $(\Delta + \gamma)$ et $(\Delta - \gamma)$, on voit immédiatement les traits saillants du passage, nombre et nature des contacts entre le disque solaire et le réticule, réunis dans le tableau ci-contre qui renferme les 5 cas possibles.

I. $d > s$. — Pas de contact. Le Soleil passe au nord ou au sud du réticule, suivant que $\mathcal{L}$ est inférieur ou supérieur à p.

II. $d = s$. — Un seul contact extérieur, sur PA, au nord ou au sud du réticule, suivant que $\mathcal{L}$ est inférieur ou supérieur à p.

III. $\delta < d < s$. — Deux contacts extérieurs. Le Soleil traverse la partie nord ou sud du réticule, suivant que $\mathcal{L} + \Delta$ est inférieur ou supérieur à $p + \gamma$.

IV. $d = \delta$. — Deux contacts extérieurs et un seul intérieur, sur PA, au nord ou au sud du réticule, suivant que $\mathcal{L} - \Delta = p - \gamma$ ou que $\mathcal{L} + \Delta = p + \gamma$.

V. $d < \delta$. — Deux contacts extérieurs et deux contacts intérieurs.

Au moment d'un contact intérieur unique, ou entre deux contacts intérieurs consécutifs, le réticule contient le disque solaire tout entier ou est, au contraire, entièrement contenu par lui, suivant que Δ est inférieur ou supérieur à γ.

Supposons que le V^e cas ait lieu.

2° **Époques et positions des contacts.** — Le triangle sphérique PAS_1 dans lequel on connaît les trois côtés $PA = p$, $PS_1 = \mathcal{L}$, $AS_1 = \Delta + \gamma$ donne ses trois angles S_1, A et $P = \tau_1$ par les

formules

$$(1)\left\{\begin{aligned} \cos(\gamma+\Delta) &= \cos p\cos\mathfrak{D} + \sin p\sin\mathfrak{D}\cos\tau_1,\\ \cos p &= \cos\mathfrak{D}\cos(\gamma+\Delta) + \sin\mathfrak{D}\sin(\gamma+\Delta)\cos S_1,\\ \cos\mathfrak{D} &= \cos p\cos(\gamma+\Delta) + \sin p\sin(\gamma+\Delta)\cos A\end{aligned}\right.$$

On a ensuite

$$t_1 = t - \tau_1, \quad t'_1 = t + \tau_1,$$

c'est à dire les heures solaires vraies et locales des contacts extérieurs

L'angle S_1 compté vers l'ouest à partir de S_1P donne la position de c_1 sur le disque solaire, rapportée au point le plus boréal u'' de ce disque Le même angle, compté vers l'est, donne la position de c'_1 sur le disque Ces deux points de contact sont symétriques par rapport au cercle horaire du centre de l'astre

L'angle A, compté vers l'est ou vers l'ouest à partir de AP, donne la position de c_1 ou c'_1 sur le cercle m, à partir du point nord u' de ce cercle, et, par suite, le même angle, porté sur le cercle réticulaire, à partir de son point sud, vers l'ouest ou vers l'est, donne les positions des 1er et 2e contacts extérieurs

Enfin, les angles $A - q$ et $A + q$, portés sur ce réticule à partir de son point le plus bas, respectivement vers l'ouest et vers l'est, donnent encore les positions du 1er et du 2e contacts extérieurs

En changeant le signe de Δ ou répétant les mêmes calculs pour le triangle APS_2, on obtiendra les époques t_2, t'_2 et positions c_2, c'_2 des contacts intérieurs

3° La durée du passage est $t'_1 - t_1$ La durée pendant laquelle le Soleil est tout entier dans le champ vaut $t'_2 - t_2$

4° A l'époque solaire vraie $t = \frac{1}{2}(t_1 + t'_1) = \frac{1}{2}(t_2 + t'_2)$ la distance du centre du Soleil au centre du champ atteint son minimum $(\mathfrak{D} - p)$

5° Pour étudier le passage d'une étoile E $(\mathcal{A}, \mathfrak{D})$ par un micromètre circulaire, il suffit de faire $\Delta = 0$ dans les considérations précédentes

REMARQUES

1° Pendant le passage du Soleil à travers le réticule circulaire d'une lunette, les quantités $(\gamma + \Delta)$, $(p - \mathfrak{D})$, τ_1 sont généralement assez

petites. Si on néglige leurs cubes dans la première équation (1) et leurs carrés dans les deux autres, ces équations deviennent, avec une approximation suffisante,

$$(2)\qquad \begin{cases} (\gamma + \Delta)^2 = (\mathfrak{L} - p)^2 + (\tau_1 \sin \mathfrak{L})^2, \\ (\mathfrak{L} - p) = (\gamma + \Delta) \cos S_1, \\ (\mathfrak{L} - p) = -(\gamma + \Delta) \cos A, \end{cases}$$

et donnent τ_1, S_1, A par les formules très simples

$$(3)\qquad \begin{cases} \tau_1^2 = \dfrac{s^2 - d^2}{\sin^2 \mathfrak{L}} = (s + d)(s - d) \operatorname{cos\acute{e}c}^2 \mathfrak{L}, \\ \cos S_1 = \dfrac{d}{s}, \\ A = 180^\circ - S_1. \end{cases}$$

Géométriquement, cette approximation revient à remplacer la sphère céleste par son plan tangent en A; et, S étant la position du Soleil la plus voisine de A, à regarder le triangle AS_1S comme rectiligne, rectangle en S, ayant pour côtés

$$AS_1 = \gamma + \Delta = s, \quad AS = \mathfrak{L} - p, \quad SS_1 = \tau_1 \sin \mathfrak{L}.$$

2° Pour une position quelconque σ du centre du Soleil sur son parallèle céleste, définie par la grandeur de l'arc $A\sigma$, le triangle sphérique $PA\sigma$ donne l'angle $\widehat{AP\sigma}$ et, par suite, $\theta = t - \widehat{AP\sigma}$. Lorsque $A\sigma$ est égal à $(\gamma + \Delta)$, $(\gamma - \Delta)$ respectivement, θ est égal à $t \mp \tau_1$, $t \mp \tau_2$. Lorsque $A\sigma = \gamma$, le centre du Soleil est sur la circonférence réticulaire.

109e Exercice.

Déterminer le rayon d'un micromètre circulaire par le passage du Soleil.

Solution : Lorsqu'on emploie le micromètre circulaire pour l'observation des taches du Soleil, il est bon de déterminer son rayon par le passage même de cet astre, parce que les erreurs personnelles dans l'observation ne sont pas les mêmes pour le limbe solaire que pour une étoile.

Soient *(fig. 83)* :

R le demi-diamètre apparent du Soleil;
$\mathfrak{D}$ sa déclinaison;
2τ et $2\tau'$ les durées qui s'écoulent respectivement entre les deux contacts extérieurs en e, e et les deux contacts intérieurs en e', e' du disque solaire et du réticule;
x la distance CI du centre du réticule au parallèle SS décrit par le centre du Soleil, distance dont l'observateur dispose *a priori*.

On a, pour déterminer x et le rayon r du réticule, les deux relations évidentes

$$(1) \qquad \begin{cases} (R + r)^2 = x^2 + (15\ \tau \cos \mathfrak{D})^2, \\ (R - r)^2 = x^2 + (15\ \tau' \cos \mathfrak{D})^2, \end{cases}$$

qui donnent :

$$(2) \qquad r = \frac{T^2 - T'^2}{4R},$$

$$(3) \qquad x^2 = \frac{4R^2 - (T - T')^2}{4R} \times \frac{4R^2 - (T + T')^2}{4R},$$

en posant

$$T = 15.\tau \cos \mathfrak{D}, \qquad T' = 15.\tau' \cos \mathfrak{D}.$$

La réalité de r et de x exige les conditions

$$T' < T, \quad \text{et} \quad T - T' > 2R \quad \text{ou} \quad T + T' < 2R,$$

qui sont toujours remplies dans la pratique. On a d'ailleurs aussi toujours

$$t_1 + t_4 = t_2 + t_3 = 2\theta,$$

en appelant t_1, t_2, t_3, t_4 les époques des contacts successifs et θ celle du passage du centre du Soleil par le cercle horaire CI de C.

REMARQUES.

1° Il est facile de reconnaître celle des deux conditions $(T - T') > 2R$ et $(T + T') < 2R$, exclusives l'une de l'autre, qui a lieu en même temps que $T' < T$. C'est la première si r est plus petit que R ou $T^2 - T'^2 < 4R^2$; c'est la seconde dans le cas contraire.

2° Lorsque r est plus grand que R, comme nous l'avons supposé dans la figure, on voit, par les équations (1), que pour une même valeur de x, les durées τ et τ' grandissent avec r. Si r est plus petit que R, on voit de même que τ grandit et τ' diminue lorsque r augmente.

3° On voit encore que, pour une même valeur de R et r, $T^2 - T'^2$ e t une constante $4Rr$, indépendante de la distance x à laquelle le centre du disque solaire passe du centre du micromètre. Cette distance x n'a aucune influence sur la précision de la formule (2) qui donne r; mais elle en a une très sensible sur celle des observations, car l'époque d'un contact est d'autant mieux appréciée que ce contact est plus instantané ou que x est plus petit.

4° Si l'on projette sur un carton le micromètre et l'image solaire, en tirant légèrement l'oculaire, on voit bien à l'œil si R est plus grand ou plus petit que r et on dispose approximativement de x, tout en le maintenant aussi petit que possible, pour que l'on ait le temps d'observer les contacts successifs. Il y en a 16 lorsque le micromètre est formé de deux couronnes larges et concentriques.

5° La relation (2) ou la constance de $T^2 - T'^2$, lorsque r et R sont donnés, peut s'établir directement. On voit, sur la figure, que

$$\begin{aligned} Sa &= SI + aI = T + T', \\ Sb &= SI - Ib = T - T'. \end{aligned}$$

D'ailleurs, les points a, b sont sur un cercle de diamètre $mn = 2r - 2R$ et l'on a :

$$Sm = 2R, \quad Sn = 2r, \quad Sa\,Sb = Sm\,Sn,$$

par suite,

$$T^2 - T'^2 = 4Rr.$$

MANIÈRE D'INSCRIRE COMMODÉMENT LES ÉPOQUES DES CONTACTS.

Supposons que le micromètre soit formé de deux couronnes concentriques, c'est-à-dire de quatre cercles que nous numérotons 1, 2, 3, 4 *(fig. 84)*.

Le premier bord du Soleil a d'abord quatre contacts extérieurs respectivement avec les cercles 1, 2, 3, 4; puis quatre contacts intérieurs successivement avec les cercles 4, 3, 2, 1. On les écrit dans l'ordre où ils se présentent, sur une même colonne verticale, de haut en bas.

Le deuxième bord a d'abord quatre contacts intérieurs avec les cercles respectifs 1, 2, 3, 4, puis quatre contacts extérieurs avec les cercles 4, 3, 2, 1. On les écrit dans leur ordre, en formant, de bas en haut, une colonne verticale parallèle à celle du premier bord. On a ainsi le tableau suivant :

	1er bord. ↓	2e bord. ↑	2τ.	$2\tau'$.
Cercle nº 1	e_1	e'_1	$-e_1+e'_1$	$-i_1+i'_1$
— 2	e_2	e'_2	$-e_2+e'_2$	$-i_2+i'_2$
— 3	e_3	e'_3	$-e_3+e'_3$	$-i_3+i'_3$
— 4	e_4	e'_4	$-e_4+e'_4$	$-i_4+i'_4$
— 4	i_4	i'_4		
— 3	i_3	i'_3		
— 2	i_2	i'_2		
— 1	i_1	i'_1		

MANIÈRE DE TENIR COMPTE DU MOUVEMENT PROPRE DU SOLEIL.

Nous avons négligé jusqu'ici le mouvement propre du Soleil; mais il est facile d'en tenir compte. Soient $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{D}$ les variations d'ascension droite et de déclinaison du Soleil en 1 seconde de temps, données par les éphémérides de cet astre pour le jour de l'observation. La vitesse du Soleil dans le champ de la lunette étant $15''(1-\delta\mathcal{A})$ en ascension droite et $\delta\mathcal{D}$ en déclinaison, aura pour expression résultante ω', qu'on calculera par la formule

$$\omega'^2 = 15^2(1-\delta\mathcal{A})^2.\cos^2\mathcal{D} + \overline{\delta\mathcal{D}}^2,$$

ou par

$$\omega' = 15(1-\delta\mathcal{A})\cos\mathcal{D},$$

si on néglige $\delta\mathcal{D}$ généralement beaucoup plus petit que $\delta\mathcal{A}$.

On pourra donc encore appliquer les formules précédentes, à la condition d'y diminuer τ, τ' de $\tau\delta\mathcal{A}$, $\tau'\delta\mathcal{A}$.

110ᵉ Exercice.

Décrire l'observation du Soleil au cercle méridien et sa réduction.

Solution : I. L'observation du Soleil au cercle méridien comprend la détermination des passages du premier et du second bord, ainsi que le pointé en distance polaire du bord supérieur et du bord inférieur; l'opération est donc assez longue et se divise en plusieurs parties.

1° Après avoir muni l'objectif de son diaphragme et du parasoleil, calé l'instrument à la distance polaire du centre de l'astre, l'observateur fait immédiatement, autant que possible, la lecture des microscopes, des thermomètres et du baromètre.

2° Le Soleil étant entré dans le champ de la lunette, l'observateur estime les passages du premier bord aux huit premiers fils

c, *b*, *a*, I, II, III, IV, V.

Il est bon de noter la minute correspondant au premier fil.

3° Il agit à la fois sur la vis supérieure de l'oculaire et sur la vis micrométrique des fils horizontaux, de manière à amener le bord supérieur au milieu du champ et le fil inférieur du couple supérieur au contact du disque solaire. Il fait trois pointés à la seconde ronde et inscrit les indications des tambours.

Il pointe aussitôt, de la même manière, le bord inférieur du Soleil avec le fil supérieur du couple inférieur.

4° Revenant au second bord du Soleil, il note ses passages aux huit derniers fils

VI, VII, VIII, IX, X, A, B, C.

5° On note la minute et l'heure; enfin, on lit une seconde fois les microscopes, les thermomètres et le baromètre.

REMARQUE.

A l'observatoire de Besançon, nous avons supprimé toute la manœuvre des vis par l'emploi de notre *oculaire triple*. (*Comptes rendus* du 27 février 1888.)

II. La réduction δt, au fil moyen v_m, de l'époque sidérale t du passage d'un bord à un fil quelconque v s'exécute facilement en tenant compte du mouvement propre du Soleil en ascension droite.

Soient, à l'époque t :

$\mathfrak{D}$ la déclinaison du Soleil;
$\delta\mathcal{A}$ la variation de son ascension droite en une seconde sidérale;
f la distance angulaire, prise avec son signe, du fil v au fil v_m.

Pendant que le Soleil passe du fil v au fil v_m, son angle horaire varie de f séc $\mathfrak{D}$. Or, en une seconde sidérale, la variation de cet angle est $(1 - \delta\mathcal{A})$. Donc, on a

$$(1) \quad \delta t = f \text{ séc } \mathfrak{D} \cdot \frac{1}{1 - \delta\mathcal{A}} = f \text{ séc } \mathfrak{D}\,(1 + \delta\mathcal{A} + \delta^2\mathcal{A} + \ldots).$$

Si $\Delta\mathcal{A}$ est la variation de $\mathcal{A}$ pendant que le Soleil passe du méridien de l'observateur au méridien suivant, distant du premier d'une seconde de longitude, on a évidemment, entre $\delta\mathcal{A}$ et $\Delta\mathcal{A}$, la relation

$$\Delta.\mathcal{A} = \frac{1}{1 - \delta\mathcal{A}} \cdot \delta\mathcal{A} = \frac{1}{1 - \delta\mathcal{A}} - 1 = \delta\mathcal{A} + \delta^2\mathcal{A} + \delta^3\mathcal{A} + \ldots$$

L'égalité (1) peut donc se mettre sous la forme

$$(2) \qquad \delta t = f \text{ séc } \mathfrak{D}\,(1 + \Delta\mathcal{A}),$$

qui est d'ailleurs évidente *a priori*.

111e Exercice.

Tenir compte de la réfraction dans l'observation d'un passage du Soleil.

Solution : On sait (49e EXERCICE, 3°) que le micromètre est assez symétrique relativement à v_m pour que les moyennes des valeurs de ε

correspondantes aux huit premiers et aux huit derniers fils soient égales et de signes contraires ; ε désignant l'effet de la réfraction sur l'époque observée d'un passage à un fil quelconque d'un bord du Soleil.

Soient :

e la valeur absolue de ces deux moyennes;

t_1 et t_2 les époques sidérales de passage du 1er et du 2e bord solaires, réduites sans tenir compte de r;

Δ la demi-durée du passage du Soleil, vu à travers le vide;

$\mathcal{AR}$ l'ascension droite du centre du disque.

L'observation étant faite suivant la règle du 110e exercice, on a :

$$\text{par le 1}^{\text{er}}\text{ bord (1) } \mathcal{AR} = t_1 + \Delta + e,$$
$$\text{par le 2}^{\text{e}}\text{ bord (2) } \mathcal{AR} = t_2 - \Delta - e,$$

et, par suite,

$$\mathcal{AR} = \tfrac{1}{2}(t_1 + t_2), \tag{3}$$
$$\Delta = \tfrac{1}{2}(t_2 - t_1) - e. \tag{4}$$

On voit que $2e$ est l'excès de la durée du passage du disque vu à travers l'atmosphère sur celle du passage vu à travers le vide.

Si l'on n'a observé qu'un bord, suivant la règle de l'exercice 110, il faudra tenir compte de e conformément aux formules (1), (2).

Si l'on a observé les deux bords, la réfraction s'élimine par l'emploi de la formule (3).

CHAPITRE II

Mouvement elliptique du Soleil.

NOTATIONS.

Dans les exercices suivants, sur le mouvement elliptique du Soleil, nous emploierons constamment quelques notations qu'il faut d'abord définir.

Soient *(fig. 85)* :
O le centre de l'ellipse solaire;
F son foyer ou la position de la terre;
P et A le périgée et l'apogée.

Sur AP comme diamètre, décrivons le cercle principal AMP de l'ellipse et posons :

$$a = \mathrm{AO} = \mathrm{OP}, \quad c = \mathrm{OF}, \quad e = \frac{c}{a},$$

si par F on mène, perpendiculairement à AP, l'ordonnée FM du cercle principal, le triangle rectangle OFM donne

$$c = a \cos \psi = a \sin \varphi \quad \text{ou} \quad e = \cos \psi = \sin \varphi,$$

en posant

$$\psi = \widehat{\mathrm{FOM}}; \quad \varphi = \widehat{\mathrm{OMF}}.$$

Nous désignerons par :
r le rayon vecteur de l'ellipse;
θ, u, ζ les anomalies vraie, excentrique, moyenne;
ϖ la longitude du périgée;
ω l'obliquité de l'écliptique;
$\mathcal{A}$, $\mathfrak{D}$ l'ascension droite et la déclinaison du Soleil;
l sa longitude.

112e Exercice.

Vérifier numériquement les lois du mouvement elliptique du Soleil.

Solution : L'observation du Soleil à la lunette méridienne donne, pour chaque jour, l'ascension droite, la déclinaison et le diamètre apparent du Soleil. De l'ascension droite et de la déclinaison, on conclut la longitude; du diamètre apparent, on conclut le rayon vecteur. On a donc tous les éléments nécessaires au calcul d'un tableau tel que le suivant :

Dates.	Longitudes observées.	Diamètres observés.	Rayons vecteurs conclus.	Rayons d'après l'ellipse.
Janvier.... 1	280° 56′	32′ 36″	0,9833	0,9831
Janvier.... 21	301 18	32 34	0,9843	0,9842
Février.... 10	321 36	32 28	0,9872	0,9873
Mars...... 2	341 44	32 20	0,9917	0,9919
Mars...... 22	1 40	32 9	0,9971	0,9971
Avril...... 11	21 23	31 58	1,0028	1,0031
Mai....... 1	40 52	31 48	1,0082	1,0085
Mai....... 21	60 10	31 39	1,0126	1,0129
Juin...... 10	79 20	31 33	1,0155	1,0157
Juin...... 30	98 25	31 31	1,0167	1,0169
Juillet..... 20	117 30	31 32	1,0160	1,0161
Août...... 9	136 38	31 37	1,0134	1,0136
Août...... 29	155 54	31 44	1,0094	1,0096
Septembre. 18	175 20	31 54	1,0042	1,0044
Octobre.... 8	195 0	32 5	0,9985	0,9986
Octobre.... 28	214 53	32 16	0,9929	0,9930
Novembre. 17	234 58	32 29	0,9882	0,9881
Décembre.. 7	255 14	32 32	0,9848	0,9847

Dates.	En un jour. Angle parcouru.	Rayon vecteur.	En un jour. Aire décrite.
Janvier.... 1	1° 1′ 11″	0,9833	0,00860
Mars...... 22	59 27	0,9972	0,00860
Juin....... 20	57 14	1,0164	0,00860
Septembre. 18	59 0	1,0012	0,00860
Novembre. 17	1 0 49	0,9862	0,00860

113e Exercice.

Quel est le lieu des points de rencontre M *des rayons correspondants* Fm *d'anomalie vraie* θ *et* Om' *d'anomalie excentrique* u?

Solution : Soient *(fig. 86)* :

$$e = \cos\psi, \quad \rho = \mathrm{FM}, \quad \rho' = \mathrm{OM}, \quad c = \mathrm{OF} = a\cos\psi.$$

On sait que

$$(1) \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta = \cot\tfrac{1}{2}\psi . \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}u,$$

et le triangle OMF donne

$$(2) \qquad \frac{\rho}{\sin u} = \frac{\rho'}{\sin\theta} = \frac{a\cos\psi}{\sin(\theta - u)}.$$

On aura le lieu cherché en coordonnées polaires ρ, θ ou ρ', u si l'on élimine ρ', u ou ρ, θ entre les équations (1) et (2). Éliminons ρ' et u. Nous avons immédiatement, en éliminant ρ' entre (2),

$$\rho(\sin\theta . \cot u - \cos\theta) = a\cos\psi,$$

mais

$$\cot u = \tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}u,$$

ou, en vertu de (1),

$$\cot u = \tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}\psi\cot\tfrac{1}{2}\theta - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\psi\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta = \frac{\cos\psi + \cos\theta}{\sin\psi\sin\theta},$$

par suite,

$$\rho = \frac{a\sin\psi\cos\psi}{\cos\psi + (1 - \sin\psi)\cos\theta}.$$

Le lieu est une ellipse ayant même foyer F et même grand axe de symétrie que l'ellipse solaire.

114e Exercice.

Étudier la projection de l'ellipse solaire sur le plan de l'équateur.

Solution : Cette projection est une autre ellipse dont il est facile de trouver l'équation en coordonnées polaires, prenant F pour pôle et le rayon vecteur Fγ du point vernal pour axe polaire.

Désignons le rayon vecteur par r', nous aurons

$$r' = r \cos \mathfrak{D} = r \frac{\cos l}{\cos \mathcal{A}};$$

mais on sait que

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(l-\varpi)}, \quad \operatorname{tg} l = \operatorname{séc}\omega . \operatorname{tg}\mathcal{A}, \quad \operatorname{séc}^2 l = 1 + \operatorname{séc}^2\omega . \operatorname{tg}^2\mathcal{A}.$$

Par suite,

$$r' = \frac{a(1-e^2).\cos l \operatorname{séc}\mathcal{A}}{1+e\cos\varpi\cos l + e\sin\varpi\sin l} = \frac{a(1-e^2)\operatorname{séc}\mathcal{A}}{e\cos\varpi + \operatorname{séc} l + e\sin\varpi\operatorname{tg} l},$$

ou

$$r' = \frac{a(1-e^2)\operatorname{séc}\mathcal{A}}{e\cos\varpi + e\sin\varpi.\operatorname{séc}\omega.\operatorname{tg}\mathcal{A} \pm \sqrt{1+\operatorname{séc}^2\omega.\operatorname{tg}^2\mathcal{A}}},$$

ou encore,

$$r' = \frac{a(1-e^2)}{e\cos\varpi.\cos\mathcal{A} + e\sin\varpi.\operatorname{séc}\omega.\sin\mathcal{A} \pm \sqrt{\cos^2\mathcal{A} + \operatorname{séc}^2\omega.\sin^2\mathcal{A}}}.$$

En posant

$$x = r'\cos\mathcal{A}, \quad y = r'\sin\mathcal{A},$$

cette équation devient, en coordonnées rectilignes,

$$[x.e\cos\varpi + y.e\sin\varpi\operatorname{séc}\omega - a(1-e^2)]^2 = x^2 + y^2\operatorname{séc}^2\omega.$$

Posons

$$D = e\cos\varpi.\cos\mathcal{A} + e\sin\varpi.\operatorname{séc}\omega.\sin\mathcal{A} \pm \sqrt{\cos^2\mathcal{A} + \operatorname{séc}^2\omega.\sin^2\mathcal{A}},$$

en prenant devant le radical le signe + ou — suivant que l et $\mathcal{A}$ se trouvent dans le 1er et le 4e ou dans les 2e et 3e quadrants, c'est-à-dire suivant que $\cos\mathcal{A}$ est positif ou négatif.

r' sera maximum ou minimum en même temps que $\frac{1}{D}$. Or, on a les valeurs de $\mathcal{A}$ qui rendent D minimum ou maximum, en résolvant l'équation en $\mathcal{A}$,

$$\frac{dD}{d\mathcal{A}} = 0,$$

ou

$$-e\cos\varpi\sin\mathcal{A} + e\sin\varpi\operatorname{séc}\omega.\cos\mathcal{A} \pm \operatorname{tg}^2\omega \cdot \frac{\sin\mathcal{A}\cos\mathcal{A}}{\sqrt{\cos^2\mathcal{A} + \operatorname{séc}^2\omega\sin^2\mathcal{A}}} = 0,$$

qui se transforme aisément par l'emploi de la relation

$$\operatorname{tg} \mathcal{A} = \operatorname{tg} l \cos \omega,$$

en celle-ci

$$-e \cos \varpi \cos^2 \omega \sin l + e \sin \varpi \cos l + \sin^2 \omega \sin l \cos l = 0,$$

que nous retrouverons et résoudrons dans le 120e exercice.

115e Exercice.

Quelle est la courbe formée sur la terre par les lieux qui voient rigoureusement le Soleil à leur zénith, au moins une fois par an?

Solution : Supposons la terre sphérique; prenons, pour origine des longitudes, le méridien qui passe par le centre du Soleil au moment de l'équinoxe du printemps; comptons le temps en jours sidéraux à partir du moment où le Soleil passe à son périgée, et soient :

t_0 l'époque de l'équinoxe;
t une époque quelconque;
$\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ les coordonnées équatoriales du Soleil à cette époque;
$\mathcal{L}$, φ les coordonnées géographiques du lieu qui voit alors le Soleil à son zénith.

On a évidemment

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathcal{D} = \varphi, \\ \mathcal{L} = t - t_0 - \mathcal{A}, \end{cases}$$

mais si l'on désigne, suivant l'usage, par ω, e, ϖ l'obliquité, l'excentricité, la longitude du périhélie de l'orbite solaire; par u, l l'anomalie excentrique, la longitude; par n le moyen mouvement en un jour sidéral; on a les formules connues

$$(2) \qquad \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{1}{2} u = \sqrt{\dfrac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (l - \varpi), \\ nt = u - e \sin u, \\ \sin \mathcal{D} = \sin l \sin \omega, \\ \sin \mathcal{A} = \operatorname{tg} \mathcal{D} . \cos \omega, \end{cases}$$

l'élimination de $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$, l, u, t entre les équations (1) et (2) donne

immédiatement, pour équation de la courbe, résolue par rapport à $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = - t_0 - \text{arc sin} (\cos \omega \text{ tg } \varphi) + \frac{1}{n} (u - e \sin u),$$

en posant

$$u = 2 \text{ arc tg } . \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \text{ tg } \tfrac{1}{2} (\text{arc sin } \overline{\sin \varphi \text{ coséc } \omega} - \varpi).$$

Dans le cours d'un an, la courbe se compose de deux spirales, l'une descendante du solstice d'été au solstice d'hiver, l'autre ascendante du solstice d'hiver au solstice d'été suivant, sensiblement symétriques par rapport aux cercles horaires de ces solstices et composées chacune de 183 spires environ. Ces deux spirales découpent, chaque année, la surface de la terre en petits quadrilatères. Le Soleil passe zéro, une, deux fois au zénith d'un lieu, pendant cette année, suivant que ce lieu est à l'intérieur, sur un côté ou sur un sommet de l'un quelconque de ces quadrilatères.

116e Exercice.

Calculer l'angle que fait, à un moment donné, le parallèle du Soleil avec la trajectoire spiraloïde de son mouvement diurne apparent.

Solution : En vertu de son mouvement propre composé avec le mouvement diurne, le Soleil paraît décrire, sur la sphère céleste supposée immobile, une courbe en spirale comprise entre les deux tropiques.

A l'époque sidérale θ d'un méridien PM, soient *(fig. 87)* :

S la position du Soleil;
t son angle horaire;
$\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ ses coordonnées équatoriales;
$\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{D}$ les variations de $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ en une seconde sidérale.

A l'époque sidérale voisine, $\theta + d\theta$, le Soleil sera en S′ relativement à PM; son angle horaire et sa déclinaison seront respectivement

$t + dt$ et $\mathfrak{D} + d\mathfrak{D}$. On aura

$$\operatorname{tg} i = \frac{S'a}{Sa},$$

a étant le point de rencontre du parallèle de S et du cercle horaire de S'.

Mais il est clair que

$$S'a = d\mathfrak{D} = \delta\mathfrak{D}.d\theta,$$
$$Sa = dt.\cos\mathfrak{D} = 15\,(1 - \delta\mathcal{A})\,d\theta.\cos\mathfrak{D},$$

d'où

$$\operatorname{tg} i = \frac{\delta\mathfrak{D}}{15\,(1 - \delta\mathcal{A})}\,\text{séc}\,\mathfrak{D} = \frac{\delta\mathfrak{D}}{15}\,(1 + \delta\mathcal{A} + \ldots)\,\text{séc}\,\mathfrak{D}.$$

Avec une approximation très suffisante, on peut adopter la formule

$$(1) \qquad i = \frac{\delta\mathfrak{D}}{15}\,\text{séc}\,\mathfrak{D}.$$

REMARQUE.

1° Il est facile d'exprimer i en fonction de la longitude l du Soleil. On a, en effet,

$$\sin\mathfrak{D} = \sin l.\sin\omega,$$

ω désignant l'obliquité de l'écliptique. On tire de là, par différentiation,

$$\cos\mathfrak{D}.\delta\mathfrak{D} = \cos l.\sin\omega.\delta l,$$

et, par suite,

$$15\,i = \frac{\sin\omega.\cos l}{\cos^2\omega + \sin^2\omega\cos^2 l}\cdot\delta l,$$

δl étant, au moment pour lequel on calcule i, la variation de l en une seconde sidérale.

Si on regarde δl comme constant ou le mouvement du Soleil autour de la Terre comme sensiblement circulaire et uniforme, les valeurs maxima et minima de i auront lieu pour les valeurs de l vérifiant l'équation

$$\sin l\,(\sin^2\omega\cos^2 l - \cos^2\omega) = 0,$$

qui se réduit à $\sin l = 0$, car ω étant plus petit que $45°$, on ne peut avoir $\cos^2 l = \cot^2\omega$.

Le maximum $+3',8$ de i, à notre degré d'approximation, a lieu pour $l=0$ à l'équinoxe du printemps, et le minimum $-3',8$ a lieu pour $l=180°$ à l'équinoxe d'automne.

2° Nous trouverons une application de la formule (1) dans l'observation des taches du Soleil par la méthode de Carrington.

117e Exercice.

Le jour solaire vrai n'est pas constant.

La constance du jour solaire vrai exigerait que l'ascension droite $\mathcal{R}$ du Soleil variât proportionnellement au temps, ou que l'on eût :

$$\frac{d\mathcal{R}}{dt} = \text{constante}.$$

Or, on a :

$$\operatorname{tg} \mathcal{R} = \operatorname{tg} \mathcal{L} \cos \omega,$$

$$r^2 \frac{d\mathcal{L}}{dt} = na^2 \sqrt{1-e^2},$$

relations qui expriment que le Soleil se meut dans un plan autour de la Terre et suivant la loi des aires *(fig. 88)*. On tire de la première, en tenant compte de la seconde,

$$\frac{d\mathcal{R}}{dt} = \frac{\cos^2 \mathcal{R} . \cos \omega}{\cos^2 \mathcal{L}} \cdot \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{\cos^2 \mathcal{R} \cos \omega}{r^2 \cos^2 \mathcal{L}} \cdot na^2 \sqrt{1-e^2},$$

mais

$$\cos \mathcal{L} = \cos \mathcal{R} \cos \mathcal{D},$$

donc

$$\frac{d\mathcal{R}}{dt} = \frac{na^2 \sqrt{1-e^2} \cos \omega}{(r \cos \mathcal{D})^2} = \frac{na^2 \sqrt{1-e^2} . \cos \omega}{r'^2},$$

en désignant par r' la projection sur l'équateur du rayon vecteur r du Soleil. $\frac{d\mathcal{R}}{dt}$ ne peut donc être constant que si l'on a

$$r' = \text{constante},$$

résultat impossible, puisque deux rayons vecteurs même oppo-

sés de l'ellipse solaire ont généralement des projections différentes [1].

REMARQUE.

Dans les formules précédentes, n est toujours le mouvement angulaire moyen du Soleil pendant l'unité de temps. Ainsi,

$$n = \frac{2\pi}{365,2422}, \quad \frac{2\pi}{366,2422}, \quad \frac{2\pi}{365,2422} \cdot \frac{1}{24}, \quad \ldots,$$

suivant que l'unité de temps est :

le jour solaire moyen, le jour sidéral, l'heure moyenne, ...

La variation de $\mathcal{A}$ en une heure moyenne est donc

$$\delta \mathcal{A} = \frac{1}{24} \cdot \frac{2\pi}{365,2422} \cdot \frac{a^2 \sqrt{1-e^2} \cos \omega}{(r \cos \mathcal{D})^2}.$$

La valeur maxima ou minima de cette variation répond à la valeur minima ou maxima de $(r \cos \mathcal{D})$.

118e Exercice.

Quelles sont les époques et les grandeurs du maximum ou minimum :

1° *De l'excès* $\theta - u$ *de l'anomalie vraie sur l'anomalie excentrique;*

2° *De l'équation du centre* C;

3° *De la réduction à l'équateur* R;

4° *De l'équation du temps* E.

Solution : Nous examinerons successivement les quatre questions proposées.

---

(1) Cette démonstration, due à M. Bonnet, m'a été communiquée par M. Tisserand.

I. $(\theta - u)$.

Posons $x = \theta - u$, nous aurons l'équation

$$(1) \qquad \frac{dx}{du} = \frac{d\theta}{du} - 1 = 0,$$

pour déterminer le maximum ou le minimum de x considéré comme fonction de u. Mais en différentiant la relation

$$(2) \qquad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\theta = \cot \tfrac{1}{2}\psi . \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} u,$$

on obtient

$$(3) \qquad d\theta . \cos^2 \tfrac{1}{2} u = du . \cos^2 \tfrac{1}{2}\theta . \cot \tfrac{1}{2}\psi,$$

et, en éliminant $\dfrac{d\theta}{du}$ entre (1) et (3), on a

$$(4) \qquad \cos^2 \tfrac{1}{2} u = \cot \tfrac{1}{2}\psi . \cos^2 \tfrac{1}{2}\theta.$$

Les valeurs de u et θ qui rendent x maximum ou minimum sont déterminées par les équations (2) et (4) qui donnent aisément

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} u = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\psi, \qquad \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}\theta = \cot \tfrac{1}{2}\psi,$$

et, par suite,

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} u \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}\theta = 1.$$

Nous tirons de là, en remarquant que $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2} u$ sont toujours de même signe, puisque leur rapport $\cot \frac{1}{2}\psi$ est positif,

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} u = \pm \sqrt{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\psi}, \qquad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\theta = \pm \sqrt{\cot \tfrac{1}{2}\psi},$$
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} u \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\theta = 1,$$

formules où l'on doit prendre ensemble les signes supérieurs ou bien les signes inférieurs. La dernière de ces formules équivaut à celle-ci :

$$\theta + u = (2k + 1)\pi,$$

où k est entier.

Les signes supérieurs correspondent au maximum de x et à deux points a, a' pris respectivement sur l'ellipse et son cercle principal. On a alors $k = 0$ ou

$$\theta + u = \pi,$$

et comme la droite aa', est perpendiculaire sur le grand axe AP de l'ellipse, elle fait des angles égaux avec Oa', Fa, en d'autres termes, les triangles OmF, ama' sont isoceles (*fig.* 89).

Les signes inférieurs correspondent au minimum de x et à deux points b, b' de l'ellipse et du cercle, situés sur le prolongement de aa'. On a alors $k = 1$ ou

$$\theta + u = 3\pi,$$

et les triangles $Om'F$, $bm'b'$ sont encore isoceles.

La formule générale

$$\mathrm{tg}\,x = \mathrm{tg}\,(\theta - u) = \frac{\mathrm{tg}\,\theta - \mathrm{tg}\,u}{1 + \mathrm{tg}\,\theta\,\mathrm{tg}\,u}$$

montre que la valeur maxima ou minima de x est donnée par

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\,x = \pm\,\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\cot\tfrac{1}{2}\,\psi} - \sqrt{\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\,\psi}\right),$$

on aura le maximum ρ ou le minimum $-\rho$, suivant qu'on prendra le signe *plus* ou le signe *moins* devant la parenthèse.

Sur la demi-ellipse AaP, de A en P, θ et u varient de 0 à π, tandis que x varie de 0 à 0 en restant positif et passant par le maximum ρ ; sur la demi-ellipse suivante, de P en A, θ et u varient de π à 2π, tandis que x varie encore de 0 à 0, mais en restant négatif et passant par le minimum $-\rho$.

L'époque t du maximum ou minimum de x se tirera de l'équation

$$n\,(t - \tau) = u - e\,\sin u,$$

dans laquelle on remplacera u par sa valeur tirée de la formule

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\,u = \pm\sqrt{\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\,\psi},$$

prise avec le signe *plus* ou le signe *moins*, τ désignant d'ailleurs l'époque du passage du Soleil au périgée.

REMARQUES.

1° Il est facile de construire les points a, b si on remarque qu'en ces points le rayon vecteur r, tiré de la formule

$$r = a\,(1 - \cos\psi\,\cos u),$$

où il faut faire

$$\cos u = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} u}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} u} = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}} = \frac{\cos \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\psi}{2}}{\cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\psi}{2}},$$

et, par suite,

$$\cos \psi \cos u = \left(\cos \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\psi}{2}\right)^2 = 1 - \sin \psi,$$

a pour valeur

$$r = a \sin \psi,$$

ou la longueur FM de l'ordonnée du cercle principal relative à F. Si donc de F et F′ comme centres avec $a \sin \psi$ et $2a - a \sin \psi$ comme rayons on décrit des arcs de cercle, ils se couperont aux points a, b.

On arriverait d'ailleurs directement à ce résultat en partant des formules bien connues (n° 274 du Cours)

$$\frac{d\theta}{dt} = n \frac{a^2}{r^2} \sin \psi, \quad \frac{du}{dt} = n \frac{a}{r},$$

qui donnent immédiatement la relation

$$\frac{d(\theta - u)}{dt} = n \frac{a}{r} \left(\frac{a}{r} \sin \psi - 1\right).$$

On voit en outre, sur cette relation, que la dérivée de $\theta - u$ passe du positif au négatif, lorsque r passe par la valeur $a \sin \psi$ en croissant du périgée à l'apogée et du négatif au positif, lorsque r repasse par la même valeur en décroissant de l'apogée au périgée.

2° On pouvait répondre à la question approximativement à l'aide des séries,

$$u = \zeta + e \sin \zeta + \tfrac{1}{2} e^2 \sin 2\zeta + \ldots,$$
$$\theta = \zeta + 2e \sin \zeta + \tfrac{5}{4} e^2 \sin 2\zeta + \ldots,$$

où ζ est l'anomalie moyenne et qui donnent, en négligeant e^3,

$$\theta - u = e \sin \zeta + \tfrac{3}{4} e^2 \sin 2\zeta,$$

L'équation $\frac{d(\theta - u)}{d\zeta} = 0$, ou

$$3e\cos^2\zeta + \cos\zeta - \tfrac{3}{2}e = 0,$$

admet pour $\cos\zeta$ deux racines réelles, dont l'une comprise entre -1 et $-\infty$ doit être rejetée, tandis que l'autre, comprise entre 0 et 1,

$$\cos\zeta = \frac{-1 + \sqrt{1 + 18e^2}}{6e} = 0{,}07,$$

donne pour ζ deux valeurs, ζ' et $2\pi - \zeta'$, répondant au maximum et au minimum de $\theta - u$; la valeur ζ' étant inférieure à 90°.

II. $C = \theta - \zeta$.

Le maximum et le minimum de C, considéré comme fonction de ζ, sont fournis par l'équation

$$(1) \qquad \frac{dC}{d\zeta} = \frac{d\theta}{d\zeta} - 1 = 0.$$

Or, on a successivement, en vertu des formules du mouvement elliptique,

$$(2) \qquad \frac{d\theta}{d\zeta} = \frac{d\theta}{du}\cdot\frac{du}{d\zeta} = \frac{\sqrt{1+e}}{\sqrt{1-e}}\cdot\frac{1+\cos\theta}{1+\cos u}\cdot\frac{a}{r},$$

$$(3) \qquad \frac{1+\cos\theta}{1+\cos u} = \frac{1-e}{1-e\cos u} = \frac{1+e\cos\theta}{1+e} = (1-e)\frac{a}{r},$$

$$(4) \qquad \frac{a}{r} = \frac{1}{1-e\cos u} = \frac{1+e\cos\theta}{1-e^2}.$$

Par suite, les valeurs de r, u, θ, ζ qui répondent aux valeurs extrêmes de C sont immédiatement fournies par les équations :

$$r^2 = a^2\cos\varphi, \qquad \cos u = \frac{1-\sqrt{\cos\varphi}}{\sin\varphi}, \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{\cos^3\varphi} - 1}{\sin\varphi},$$

$$\zeta = u - \sin\varphi\sin u,$$

en posant $e = \sin\varphi$.

REMARQUE.

La série connue

$$C = 2e \sin \zeta + \tfrac{5}{4} e^2 \sin 2\zeta + \ldots$$

limitée à ses deux premiers termes, permet de résoudre approximativement la même question avec la plus grande facilité.

III. $R = \mathcal{A} - l$.

L'équation donnant les valeurs extrêmes de R, considéré comme fonction de l, est

$$(1) \qquad \frac{dR}{dl} = \frac{d\mathcal{A}}{dl} - 1 = 0;$$

mais on sait que

$$\operatorname{tg} \mathcal{A} = \operatorname{tg} l \cos \omega,$$

par suite,

$$(2) \qquad \frac{d\mathcal{A}}{dl} = \frac{\cos^2 \mathcal{A}}{\cos^2 l} \cos \omega = \frac{\cos \omega}{\cos^2 l + \sin^2 l \cos^2 \omega}.$$

Éliminant $\dfrac{d\mathcal{A}}{dl}$ entre (1) et (2), il vient

$$\cos^2 l . \sin^2 \omega + \cos^2 \omega - \cos \omega = 0,$$

ou

$$(3) \qquad \operatorname{tg}^2 l = \operatorname{s\acute{e}c} \omega.$$

L'équation (3) donne, pour répondre aux valeurs extrêmes de R, quatre valeurs λ, $\pi - \lambda$, $\pi + \lambda$, $2\pi - \lambda$. Les rayons vecteurs correspondants du Soleil forment deux droites symétriques par rapport à la ligne des équinoxes ou des solstices. Il y a deux maxima de R séparés par deux minima.

La formule générale

$$\operatorname{tg} R = \frac{\operatorname{tg} l - \operatorname{tg} \mathcal{A}}{1 + \operatorname{tg} l \operatorname{tg} \mathcal{A}} = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \omega \cdot \frac{\operatorname{tg} l}{1 + \cos \omega \operatorname{tg}^2 l},$$

montre que les valeurs extrêmes de R sont données par

$$\operatorname{tg} R = \pm \sin^2 \tfrac{1}{2} \omega \sqrt{\operatorname{s\acute{e}c} \omega}.$$

Les deux maxima sont égaux entre eux; ils sont aussi égaux aux deux minima, mais de signes contraires.

REMARQUE.

La série connue

$$R = -\operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} \sin 2l + \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}^4 \frac{\omega}{2} \sin 4l - \dots$$

bornée à ses deux premiers termes, permet de résoudre aisément la même question avec une approximation suffisante et montre que les valeurs de l, répondant aux valeurs extrêmes de R, satisfont à l'équation

$$2 \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} \cos^2 2l - \cos 2l - \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} = 0,$$

facile à discuter.

IV. E = C + R.

On peut mettre E sous la forme

$$E = (\theta - \zeta) + (\mathcal{A} - l),$$

ou, puisque

$$l = \varpi + \theta,$$

sous la forme

$$E = \mathcal{A} - \zeta - \varpi,$$

ϖ désignant la longitude du périgée. Par suite, les valeurs extrêmes de E, considérée comme fonction du temps, sont données par

$$(1) \qquad \frac{d\mathcal{A}}{dt} = n,$$

n désignant le moyen mouvement du Soleil; ou, en remplaçant $\frac{d\mathcal{A}}{dt}$ par sa valeur donnée dans l'exercice 117ᵉ, par

$$(2) \qquad (r \cos \mathcal{D})^2 = a^2 \cos \varphi \cos \omega,$$

$\mathcal{D}$ désignant la déclinaison du Soleil et $\sin \varphi$ la constante e.

Si à l'équation (2) on joint les relations bien connues

$$\text{(3)} \qquad \sin \mathfrak{D} = \sin l \sin \omega,$$

$$\text{(4)} \qquad r = \frac{a \cos^2 \varphi}{1 + \sin \varphi \cos (l - \varpi)},$$

les équations (2), (3), (4) détermineront les valeurs de r, l, $\mathfrak{D}$ qui conviennent aux valeurs extrêmes de E.

Prenons le centre T de la Terre pour celui de la sphère céleste et considérons la projection sur l'équateur de l'ellipse solaire P. Cette projection sera une autre ellipse P′ (*fig. 90*), dont le rayon vecteur r', correspondant à $\mathfrak{D}$, a pour expression

$$\text{(5)} \qquad r' = r \cos \mathfrak{D}.$$

Si donc nous posons

$$\text{(6)} \qquad \rho^2 = a^2 \cos \varphi \cos \omega,$$

le cercle de rayon ρ, décrit dans le plan de l'équateur de T comme centre, sera représenté par (6) et les points de rencontre de l'ellipse (5) avec le cercle (6) seront les projections sur l'équateur des points de l'ellipse solaire où E atteint ses limites.

Éliminons r et $\mathfrak{D}$ entre (2), (3) et (4), nous aurons

$$1 - \sin^2 l \sin^2 \omega = \frac{\cos \omega}{\cos^3 \varphi} [1 + \sin \varphi \cos (l - \varpi)]^2,$$

ou

$$\text{(7)} \quad \sin^2 l = \text{coséc}^2 \omega - \cot \omega . \text{coséc}\, \omega . \text{séc}^3 \varphi\, (1 + \sin \varphi \cos \theta)^2.$$

L'équation (7), où $\theta = l - \varpi$, donne les valeurs de l répondant aux valeurs maxima ou minima de E. On séparera d'abord les quatre racines réelles, entre 0° et 360°, de cette équation par des substitutions convenablement dirigées et fournissant des valeurs approchées de ces racines; ou, mieux encore, on obtiendra immédiatement ces valeurs approchées, en négligeant φ dans l'équation (7) qui devient

$$\sin^2 l = \frac{1 - \cos \omega}{\sin^2 \omega} = \tfrac{1}{2}\, \text{séc}^2 \frac{\omega}{2},$$

et donne pour l quatre valeurs, l_1, $180° - l_1$, $180° + l_1$, $360° - l_1$

entre 0° et 360°. En partant de l'une d'elles comme valeur approchée d'une racine, pour la substituer dans θ, l'équation (7) donnera une valeur plus approchée de cette racine et ainsi de suite jusqu'à ce que les approximations successives fournissent la valeur exacte. On calculera ainsi aisément les quatre racines de (7).

REMARQUES.

1° La résolution de (7) se ramène à l'intersection du cercle

$$x^2 + y^2 = 1,$$

et de la conique

$$x^2 = \operatorname{cos\acute{e}c}^2 \omega - \cot \omega \operatorname{cos\acute{e}c} \omega \operatorname{s\acute{e}c}^2 \varphi (1 + y \sin \varphi \cos \varpi + x \sin \varphi \sin \varpi)^2,$$

en posant

$$x = \sin l, \quad y = \cos l.$$

2° On peut résoudre approximativement la question actuelle à l'aide de la formule approchée (n° 280 du COURS),

$$E = 2e \sin (l - \varpi) - \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} \omega \sin 2l,$$

119e Exercice.

Calculer la durée du jour vrai J_v *pour une date donnée, connaissant la variation* $\delta \mathcal{A}$ *d'ascension droite du Soleil, en une heure moyenne, donnée pour cette date par la* Connaissance des temps.

Solution : 1° Calculons d'abord J_v en temps sidéral. Soit σ la variation d'ascension droite du Soleil en un jour sidéral J_s à l'époque donnée. A cette époque l'angle horaire du Soleil varie de $2\pi - \sigma$ en un jour sidéral et si on admet que cet angle croît proportionnellement au temps dans la durée du jour vrai cherché, ce qui est très sensiblement exact, on aura

$$(1) \qquad J_v = J_s \frac{2\pi}{2\pi - \sigma}.$$

En posant $\alpha = \frac{\sigma}{2\pi}$, il vient

$$J_v = \frac{J_s}{1-\alpha} = J_s + \frac{\alpha}{1-\alpha} J_s,$$

ou, développant en série,

$$J_v = J_s (1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots);$$

mais, si l'on exprime σ et 2π en secondes d'arcs, k désignant le rapport du jour sidéral J_s au jour moyen J_m,

$$\sigma = 24.15.k\,\delta\mathcal{A},$$
$$2\pi = 360.3600,$$

et, par suite,

$$\alpha = \frac{k}{3600}\cdot\delta A = (\bar{4},442.5100)\,\delta\mathcal{A}.$$

2° Calculons J_v en temps moyen. Soit μ la variation de l'équation du temps, à la date donnée, en un jour moyen, ou de la différence $\mathcal{A} - \mathcal{A}_m$ entre les ascensions droites du Soleil vrai et du Soleil moyen. A cette époque, l'angle horaire du Soleil vrai varie de $2\pi - \mu$ en un jour moyen. On a donc

$$J_v = J_m \frac{2\pi}{2\pi - \mu} = \frac{J_m}{1-\beta} = J_m + \frac{\beta}{1-\beta} J_m,$$

en posant

$$\beta = \frac{\mu}{2\pi},$$

et, en développant en série,

$$J_v = J_m (1 + \beta + \beta^2 + \ldots);$$

mais si l'on exprime μ en secondes d'arc, ainsi que 2π,

$$\mu = 24\,\delta\mathcal{A}.15 - n = 360.\delta\mathcal{A} - n,$$

et

$$\beta = \frac{1}{3600}\,\delta\mathcal{A} - \frac{n}{360.3600},$$

n exprimant, en secondes d'arc, le mouvement moyen du Soleil en un jour moyen.

3° Au lieu de calculer directement J_v en temps moyen, il sera plus court de transformer en temps moyen sa valeur en temps sidéral. On a ainsi

$$J_v = \frac{k}{1-\alpha} J_m = J_m + \left(\frac{k}{1-\alpha} - 1\right) J_m.$$

120° Exercice.

Quelles sont les dates des valeurs maxima, minima et moyenne du jour solaire vrai?

Solution : Ces dates sont évidemment les mêmes que celles des valeurs maxima, minima et moyenne de $\frac{d\mathcal{A}}{dt}$ ou de la variation horaire de l'ascension droite $\mathcal{A}$ du Soleil. Or, on sait que

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{na^2 \cos\varphi \cos\omega}{(r\cos\mathcal{D})^2}, \quad \sin\mathcal{D} = \sin l \sin\omega,$$

et la question revient à étudier les variations de $r^2 \cos^2 \mathcal{D}$ ou bien de $r^2(1 - \sin^2 l \sin^2 \omega)$.

1° On a :

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt}(r^2 \cos^2 \mathcal{D}) = r\frac{dr}{dt}(1 - \sin^2 l \sin^2 \omega) - r^2 \sin l \cos l \sin^2 \omega \frac{dl}{dt};$$

mais on sait que (n° 274 du COURS),

$$l = \varpi + \theta, \quad r = \frac{a\cos^2\varphi}{1+\sin\varphi\cos\theta}, \quad \frac{dr}{dt} = na\,\mathrm{tg}\varphi\sin\theta, \quad r^2\frac{dl}{dt} = na^2\cos\varphi.$$

Substituant dans la dérivée de $r^2\cos^2\mathcal{D}$, pour l'égaler à zéro, on a l'équation

$$(1)\quad \sin\varphi\cos\varpi\cos^2\omega.\sin l - \sin\varphi\sin\varpi\cos l - \sin^2\omega\sin l\cos l = 0,$$

qui détermine les valeurs de l correspondantes aux dates cherchées des maxima et minima.

Si l'on pose

$$x = \sin l, \quad y = \cos l,$$

la résolution de cette équation est ramenée à l'intersection du cercle

$$x^2 + y^2 = 1,$$

et de l'hyperbole

$$xy \sin^2 \omega - x \sin \varphi \cos \varpi \cos^2 \omega - y \sin \varphi \sin \varpi = 0.$$

L'équation (1) a donc quatre racines entre 0 et 2π. Il est facile de voir que ces racines sont réelles et de les séparer par les substitutions suivantes, en désignant par m le premier membre de (1) et se rappelant que

$$\sin \varphi = \frac{1}{60}, \quad \varpi = 280^\circ, \quad \omega = 23^\circ 27'$$

environ :

pour $l = 0$, $\quad m = -\sin \varphi \sin \varpi \ldots\ldots$ valeur de signe +

$l = 45^\circ$, $\quad m \begin{cases} = \sin \varphi (\cos^2 \omega \cos \varpi - \sin \varpi) - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \sin^2 \omega. & - \\ < 2 \sin \varphi - \frac{1}{2}\sqrt{2} \sin^2 \omega, & \end{cases}$

$l = 90^\circ$, $\quad m = \sin \varphi \cos \varpi \cos^2 \omega \ldots\ldots$ +

$l = \varpi - 180^\circ$, $\quad m = \sin \varpi \cos \varpi . \sin^2 \omega (\sin \varphi - 1) \ldots\ldots$ +

$l = 180^\circ$, $\quad m = \sin \varphi \sin \varpi \ldots\ldots$ —

$l = 270^\circ$, $\quad m = -\sin \varphi \cos \varpi \cos^2 \omega \ldots\ldots$ —

$l = \varpi$, $\quad m = -\sin \varpi \cos \varpi \sin^2 \omega (\sin \varphi + 1) \ldots$ +

Les racines étant séparées, il est aisé d'obtenir ensuite chacune d'elles par approximations successives, aussi exactement qu'on voudra.

On voit qu'il y a deux racines dans le printemps : l'une voisine de l'équinoxe, l'autre du solstice; une dans l'été, voisine de l'équinoxe d'automne; enfin une dans l'hiver, entre le solstice et le périgée. Il n'y en a pas en automne.

2° Lorsque le jour solaire vrai prend sa valeur moyenne, l'on a

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{d\mathcal{A}_m}{dt} = n,$$

ou

$$a^2 \cos \varphi \cos \omega = r^2 \cos^2 \mathcal{D}, \tag{2}$$

ou l'équation déjà résolue dans un exercice précédent

$$(3) \quad \cos \omega\, [1 + \sin \varphi \cos (l - \varpi)]^2 = \cos^3 \varphi\, (1 - \sin^2 l \sin^2 \omega),$$

c'est-à-dire que l'équation du temps E passe une valeur maxima ou minima, résultat évident, *a priori*, d'après la définition même de E,

$$E = \mathcal{A} - \mathcal{A}_m.$$

Cette définition montre aussi que les valeurs maxima, minima et moyenne des variations horaires de l'équation du temps et de l'ascension droite du Soleil ont lieu aux mêmes époques, pour les valeurs de l qui vérifient les équations (1) et (3). On a en effet constamment

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\mathcal{A}}{dt} - n.$$

121e Exercice.

Vérifier numériquement sur la Connaissance des temps *d'une année quelconque, soit de 1885, les résultats des exercices précédents.*

Solution : Si nous désignons par $\frac{d\mathcal{A}}{dt}$, $\frac{dE}{dt}$ les variations horaires de $\mathcal{A}$, E, nous obtenons immédiatement le tableau suivant :

1885	$\frac{d\mathcal{A}}{dt}$	$\frac{dE}{dt}$	J_v	E
Janvier ... 1	$11^s,03$	$+1^s,17$	$J_m + 27^s,93$	$+4^m\ 0^s,12$
Février ... 10	n.......	0......	J_m............	$+14^m 27^s,88$ M
Mars...... 27	$9^s,08\ m$	$-0^s,77\ m$	$J_m - 18^s,51\ m$	
Mai 14	n.......	0......	J_m............	$-3^m 51^s,66\ m$
Juin...... 18	$10^s,40$ M	$+0^s,54$ M	$J_m + 13^s,00$ M	
Juillet 26	n.......	0......	J_m............	$+6^m 14^s,28$ M
Septembre 17	$8^s,97\ m$	$-0^s,88\ m$	$J_m - 21^s,18\ m$	
Novembre. 2	n.......	0......	J_m............	$-16^m 19^s,52\ m$
Décembre. 22	$11^s,10$ M	$+1^s,24$ M	$J_m + 29^s,88$ M	
Décembre. 31	$11^s,05$	$+1^s,19$	$J_m + 28^s,51$	$+3^m 24^s,07$

$\frac{d\mathcal{A}}{dt}$, $\frac{dE}{dt}$ sont inscrits dans la *Connaissance des temps*, respecti-

vement à la suite des colonnes intitulées *Ascension droite, Temps moyen civil,* à midi vrai ; J_v s'obtient pour chaque jour en retranchant le temps moyen civil à midi vrai de ce jour, de sa valeur au midi vrai du jour suivant ; E est, à 12 heures près, le temps moyen civil à midi vrai.

On sait que le temps moyen civil donné par la *Connaissance des temps* est toujours en *avance* de 12 heures sur le temps moyen astronomique. En d'autres termes, un jour moyen civil commence à minuit moyen, tandis que le même jour moyen astronomique commence au midi moyen suivant.

Dans ce tableau : $n = 9^s,86$, valeur moyenne de $\frac{d\mathcal{A}}{dt}$ et la lettre m où M suit les nombres qui représentent des valeurs *minima* ou *maxima*.

122e Exercice.

Pour un lieu A de longitude $\mathcal{L}$ et latitude φ, à une date connue, quelles sont les durées de la journée et de la nuit, de la matinée et de la soirée, vraies ou civiles?

Solution : La journée J_0 et la nuit J_n s'écoulent respectivement du lever au coucher et du coucher au lever du centre du Soleil vrai. La matinée et la soirée vraies μ et σ s'écoulent du lever à midi vrais et de midi au coucher vrais. La matinée et la soirée civiles m, s s'écoulent du lever vrai à midi moyen et de midi moyen au coucher vrai.

Ces définitions posées, désignons, pour la date donnée, par $\mathcal{A}$, $\mathfrak{D}$ les coordonnées équatoriales du Soleil à midi vrai du lieu A, c'est-à-dire à l'heure vraie $\mathcal{L}$ de Paris. Si ces coordonnées étaient invariables, l'angle horaire $-t$ et $+t$ du Soleil à son lever et à son coucher serait fourni par la formule

$$(1) \qquad \cos t = -\cot \mathfrak{D} \cot \varphi.$$

Mais $\mathfrak{D}$ varie sensiblement de la même quantité $\delta\mathfrak{D}$ pendant la matinée et pendant la soirée. La variation correspondante δt de t est

$$\delta t = -\frac{\cot \varphi}{\sin^2 \mathfrak{D} \sin t}\,\delta\mathfrak{D},$$

Le jour vrai et l'équation du temps, à la date considérée, étant J_v et E, on a les formules évidentes et suffisamment approchées :

$$\mu = \frac{t - \delta t}{2\pi} J_v, \qquad m = \mu - E,$$

$$\sigma = \frac{t + \delta t}{2\pi} J_v, \qquad s = \sigma + E,$$

$$\sigma - \mu = \frac{\delta t}{\pi} J_v, \qquad s - m = \sigma - \mu + 2E,$$

$$J_o = \sigma + \mu = s + m = \frac{t}{\pi} J_v,$$

$$J_n = J_v - J_o = \frac{\pi - t}{\pi} J_v.$$

Si, pour une variation de 1 jour dans la date, l'on désigne les variations correspondantes de t, J_v, J_o, J_n par dt, dJ_v, dJ_o, dJ_n, on voit que

$$\pi dJ_o = \quad t.dJ_v + J_v dt,$$
$$\pi dJ_n = - t dJ_v - J_v dt + \pi dJ_v,$$

J_o et J_n varient dans le même sens lorsque dt est nul ou très petit; c'est-à-dire dans le voisinage des solstices si φ est différent de 90° et à toute époque si $\varphi = 90°$.

J_o et J_n varient en sens contraire, de la même quantité, lorsque dJ_v est nul ou très petit, c'est-à-dire lorsque J_v est dans le voisinage de ses valeurs maxima ou minima.

123e Exercice.

Conversion du temps sidéral et du temps moyen l'un dans l'autre.

On sait que la durée T de l'année tropique est

$$T = M.J_m = S.J_s.$$

Si l'on désigne par J_m, J_s les durées respectives du jour moyen, du jour sidéral et si l'on pose

$$M = 365{,}242217, \qquad S = 366{,}242217 = M + 1,$$

nous avons donc

$$J_m = J_s + \frac{1}{M} J_s = J_s + (\bar{3},437.4191)\, J_s,$$

$$J_s = J_m - \frac{1}{S} J_m = J_m - (\bar{3},436.2316)\, J_m,$$

en représentant $\frac{1}{M}$, $\frac{1}{S}$ par leurs logarithmes entre parenthèses. Plus généralement,

$$(1) \qquad t_m = t_s + (\bar{3},437.4191)\, t_s,$$

$$(2) \qquad t_s = t_m - (\bar{3},436.2316)\, t_m,$$

t_m, t_s désignant un même nombre abstrait, quelconque, t, entier ou non, de jours moyens et de jours sidéraux, c'est-à-dire $t.J_m$, $t.J_s$.

La formule (1) sert à passer du nombre t, qui exprime une durée en temps moyen au nombre $t + (\bar{3},437.4191)\, t$, qui exprime la même durée en temps sidéral.

La formule (2) sert à passer du nombre t, qui exprime une durée en temps sidéral, au nombre $t - (\bar{3},436.2316)\, t$, qui exprime la même durée en temps moyen.

Posons

$$\delta t_s = (\bar{3},437.4191)\, t, \qquad \delta t_m = (\bar{3},436.2316)\, t,$$

nous aurons

$$t_m = t_s + \delta t_s, \qquad t_s = t_m - \delta t_m.$$

La conversion d'une durée t, moyenne ou sidérale en temps sidéral ou moyen, se réduit à faire subir au nombre t la correction δt_s ou $-\delta t_m$.

Les valeurs de δt_m et δt_s se trouvent dans les tables V et VI de la *Connaissance des temps* (pages 691, 692, année 1885), calculées d'avance pour toutes les valeurs fractionnaires usuelles de t, c'est-à-dire pour toutes les heures, minutes et secondes du jour.

Voici le calcul direct de la conversion : 1° de 15 heures sidérales en temps moyen ; 2° de 15 heures moyennes en temps sidéral :

1°	2°
$\log 15 = 1{,}176.0913$	$\log 15 = 1{,}176.0913$
$\log 3600 = 3{,}556.3025$	$\log 3600 = 3{,}556.3025$
$\log \frac{1}{S} = \bar{3}{,}436.2316$	$\log \frac{1}{M} = \bar{3}{,}437.4191$
$\log \delta t_m = 2{,}168.6254$	$\log \delta t_s = 2{,}169.8129$
$\delta t_m = 2^m 27^s{,}443$	$\delta t_s = 2^m 27^s{,}847$

La *Connaissance des temps* dispense de ce petit calcul en donnant δt_m, δt_s.

$$15^{h.s} = 15^{h.m} - 2^m 27^s{,}443 = 14^h 57^m 32^s{,}557 \quad \text{temps moyen,}$$
$$15^{h.m} = 15^{h.s} + 2^m 27^s{,}847 = 15^h\ 2^m 27^s{,}847 \quad \text{temps sidéral.}$$

REMARQUES.

Pour t inférieur à 1 minute, on a $\delta t_m = \delta t_s$ à un millième de seconde près.

A midi vrai,

le temps sidéral t_s = l'ascension droite du Soleil vrai $\mathcal{R}$;
le temps moyen t_m = le temps sidéral t_s — la longitude apparente du Soleil moyen $\odot_m$
= le temps sidéral t_s — l'ascension droite du Soleil moyen $\mathcal{R}_m$;
= l'équation du temps.

A midi moyen,

le temps sidéral $t_s = \mathcal{R}_m = \odot_m$;
le temps vrai $t_v = t_s - \mathcal{R}$;
= — l'équation du temps.

124e Exercice.

Calculer, pour un jour donné, la variation δt de l'angle horaire du Soleil en une seconde sidérale.

Solution : La *Connaissance des temps* donne, pour le midi du

jour considéré, la variation $d\mathcal{A}$ en temps, de l'ascension droite du Soleil pendant une heure moyenne.

En une heure sidérale, le même jour, l'ascension droite du Soleil varie de $\delta\mathcal{A}$, donné en temps par la formule

$$\delta\mathcal{A} = d\mathcal{A} \cdot \frac{1^{\text{h. sid.}}}{1^{\text{h. moy.}}} = d\mathcal{A} \cdot \frac{365.2422}{366.2422},$$

et, en une seconde sidérale, le mouvement propre μ du Soleil en ascension droite, exprimé en temps, sera

$$\mu = \frac{\delta A}{3600} = \mathrm{K}\, d\mathcal{A},$$

en posant

$$\mathrm{K} = \frac{1}{3600} \times \frac{365{,}2422}{366{,}2422} = (\bar{4}{,}442.51).$$

En une seconde sidérale, la variation δt de l'angle horaire du Soleil, exprimée en secondes d'arc, sera

$$\delta t = (1 - \mu)\, 15'' = (1 - \mathrm{K} d\mathcal{A}).15.$$

125e Exercice.

Calculer le diamètre apparent 2Δ *du Soleil, connaissant sa déclinaison* $\mathcal{D}$, *le temps sidéral* 2θ *qu'il met à franchir le méridien* PM *et son mouvement propre* μ *en ascension droite, pendant une seconde sidérale.*

Solution : Soient *(fig. 91) :*

t l'angle horaire du Soleil au moment de l'un de ses contacts avec le méridien ;
S son centre ;
P le pôle.

Le triangle rectangle PSC donne

$$\sin \Delta = \sin t \cos \mathcal{D},$$

ou, avec une exactitude suffisante,

$$\Delta = t.\cos \mathfrak{D};$$

mais

$$t = \theta\,(1 - \mu).15,$$

d'où

(1) $$\Delta = 15\theta\,(1 - \mu)\cos \mathfrak{D}.$$

Corollaire.

On n'a observé que le passage, à l'époque t, d'un bord du Soleil. On connaît Δ. Quelle est l'époque t_0 du passage du centre?

Solution : On a évidemment

$$t_0 = t \pm \frac{\Delta}{15\,(1 - \mu)\cos \mathfrak{D}} \begin{cases} + \ 1^{\text{er}} \text{ bord,} \\ - \ 2^{\text{e}} \text{ bord.} \end{cases}$$

126e Exercice.

Calculer la durée θ du passage du demi-diamètre du Soleil.

Solution : La formule (1) de l'avant-dernier exercice donne, pour la durée sidérale θ_s du passage,

$$\theta_s = \frac{\Delta}{15} \cdot \text{séc}\,\mathfrak{D} \cdot \frac{1}{1 - \mu},$$

ou, avec une approximation suffisante, à cause de la petitesse de μ,

$$\theta_s = \frac{\Delta}{15}\,\text{séc}\,\mathfrak{D}\,(1 + \mu),$$

durée qu'il est facile de transformer en temps moyen.

EXEMPLE. — Calculer θ pour le 15 avril 1885.

La *Connaissance des temps* donne :

$$\Delta = 15'\,50'',88 \qquad \mathfrak{D} = +\ 18^\circ 58'\,9'', \qquad d\mathcal{R} = 9^s,886.$$

En convertissant Δ en temps, on obtient d'abord $\frac{\Delta}{15} = 63^s,39$; on a ensuite le petit calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\log K &= \bar{4},442.51 \\
\log d\mathcal{A} &= 0,995.02 \\
\log K d\mathcal{A} &= \bar{3},437.53 \\
\hline
\mu = K d\mathcal{A} &= 0,002.739 \\
1 + \mu &= 1,002.739 \\
\hline
\log (1 + \mu) &= 0,001.17 \\
\log \frac{\Delta}{15} &= 1,802.02 \\
\log \text{séc}\, \mathfrak{D} &= 0,024.25 \\
\hline
\log \theta_s &= 1,827.44 \\
\theta_s &= 1^m 7^s,21
\end{aligned}$$

En transformant θ_s en temps moyen, on a, pour la durée moyenne θ_m du passage,

$$\theta_m = 1^m 7^s,03.$$

REMARQUE.

Δ séc $\mathfrak{D}$ est l'angle horaire du centre du Soleil au moment où son premier bord touche le méridien considéré. Par suite, $\frac{1}{15}\Delta$ séc $\mathfrak{D}$ est le temps solaire vrai θ_v que met ce centre à atteindre le méridien, ou la durée du passage en temps vrai. On peut donc écrire

$$\theta_s = \theta_v + \mu\theta_v,$$

ou, comme θ_v diffère très peu de θ_m,

$$\theta_s = \theta_m + \mu\theta_m.$$

D'ailleurs, l'excès de θ_s sur θ_m,

$$\mu\theta_m = K . d\mathcal{A} . \theta_m,$$

a une valeur sensiblement constante et égale à $0^s,18$ ou $0^s,19$ environ.

127ᵉ Exercice.

A quelle époque la durée θ_s du passage du Soleil est-elle maxima ou minima?

Solution : Nous venons de voir que, pour un jour quelconque,

$$\theta_s = \frac{\Delta}{15} \text{séc } \mathfrak{D} \, (1 + \mathrm{K}\, d\mathcal{R}),$$

et nous savons que Δ, $\mathfrak{D}$, $d\mathcal{R}$ varient d'un jour à l'autre. Mais si l'on désigne par Δ_0 le diamètre apparent du Soleil, correspondant à la distance moyenne de cet astre à la terre, distance prise comme unité pour évaluer le rayon vecteur r au jour considéré, on a

$$\Delta = \frac{\Delta_0}{r},$$

on sait, en outre, que le mouvement du Soleil en ascension droite, $d\mathcal{R}$, pendant une heure moyenne est

$$d\mathcal{R} = \frac{1}{24} \cdot \frac{2\pi}{365,2422} \cdot \frac{a^2 \sqrt{1 - e^2} \cos \omega}{(r \cos \mathfrak{D})^2},$$

d'où

$$\mathrm{K}\, d\mathcal{R} = \frac{2\pi}{24} \cdot \frac{1}{3600} \cdot \frac{1}{366,2422} \cdot \frac{a^2 \sqrt{1 - e^2} \cos \omega}{(r \cos \mathfrak{D})^2} = \frac{m}{(r \cos \mathfrak{D})^2},$$

en posant

$$m = \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2} \cos \omega}{12.3600.366,2422}.$$

Par suite,

$$\theta_s = \frac{\Delta_0}{15} \cdot \frac{1}{(r \cos \mathfrak{D})} \left(1 + \frac{m}{(r \cos \mathfrak{D})^2}\right).$$

On voit que θ_s est maximum ou minimum lorsque $(r \cos \mathfrak{D})$ est minimum ou maximum.

128e Exercice.

En un lieu A *et pour un jour* J *donnés, calculer l'heure du lever ou du coucher du centre du Soleil, en tenant compte de l'aplatissement de la Terre* ε, *de la dépression de l'horizon* d, *de la réfraction* r *et de la parallaxe* p.

Solution : Soient :

φ, φ' les colatitudes géographique et géocentrique du lieu;
$\mathcal{L}$ sa longitude, comptée du méridien de Paris vers l'est, de 0° à 360°;
$\psi = \varphi' - \varphi$.

On trouve, dans la *Connaissance des temps,* les coordonnées équatoriales $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ du Soleil, pour tous les jours de l'année, à midi vrai de Paris, c'est-à-dire pour l'heure vraie $\mathcal{L}$ de A, avec leurs variations horaires a, b. Ces variations sont très sensiblement constantes dans l'intervalle d'un jour et l'on peut poser, pour le jour J,

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 + b\,(t - \mathcal{L}), \tag{1}$$

en désignant par t l'angle horaire géocentrique du Soleil pour le lieu A, par $\mathcal{D}_0$ la valeur de $\mathcal{D}$ à midi vrai de Paris.

Sur la sphère céleste géocentrique, considérons le triangle PZS déterminé par les directions de l'axe du monde, de la verticale en A et du Soleil vu du centre de la terre. Désignons par φ, $\mathcal{D}$, z les côtés PZ, PS, ZS et par q, $180° - a$, t les angles opposés. Sur la sphère céleste de centre A, considérons le triangle P'Z'S' formé, au même moment par les deux premières directions et celle du Soleil vu de A, dont nous désignons les côtés par φ, $\mathcal{D}'$, z'.

Dans la théorie des parallaxes, nous avons vu que

$$z = z' - p\,(\cos\psi \sin z' - \sin\psi \cos z' \cos a). \tag{2}$$

Le triangle PZS donne d'ailleurs les relations bien connues :

$$\cos z = \cos \mathcal{D} \cos \varphi + \sin \mathcal{D} \sin \varphi \cos t, \tag{3}$$
$$\sin a = \sin \mathcal{D} \sin t \,\text{coséc}\, z. \tag{4}$$

Les équations (1), (2), (3), (4) lient entre elles, pour le jour J et le

lieu A, les cinq quantités t, $\mathfrak{L}$, a, z, z'. Si la dernière est donnée, les quatre autres sont calculables.

Or, au moment où le Soleil paraît, à travers l'atmosphère, traverser l'horizon sensible de A, l'on a

$$(5) \qquad z' = 90^\circ + d + r,$$

en désignant par r la réfraction correspondante à $(90^\circ + d)$.

z' étant connu, l'heure solaire vraie locale t est déterminée. Mais pour la calculer aisément, il convient de résoudre les équations (1), (2), (3), (4) par approximations successives, dans l'ordre suivant :

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 \ldots\ldots\ldots\ldots & \mathfrak{L}_1, & \mathfrak{L}_2, & . \\ z = z_0 = z' - p \cos\psi \sin z', & z_1, & z_2, & . \\ t = t_0 \ldots\ldots\ldots\ldots & t_1, & t_2, & . \\ a = a_0 \ldots\ldots\ldots\ldots & a_1, & a_2, & . \end{array}$$

On attribuera d'abord à $\mathfrak{L}$ et z les valeurs initiales $\mathfrak{L}_0$ et $z_0 = z' - p \cos\psi \sin z'$ avec lesquelles on calculera les valeurs correspondantes t_0 de t par l'équation (3) et a_0 de a par l'équation (4). Avec t_0, a_0 on tirera des équations (1), (2) des valeurs plus approchées $\mathfrak{L}_1$, z_1 pour $\mathfrak{L}$, z auxquelles correspondent pour t, a des valeurs t_1, a_1, fournies par (3), (4) et ainsi de suite. On arrêtera le calcul dès que la valeur de t ne changera plus ou du moins ne variera que de quantités inférieures à l'approximation désirée.

En transformant en temps moyen le temps vrai t ainsi obtenu, on aura l'heure du lever ou du coucher du Soleil.

REMARQUES.

1° La valeur de p est donnée par la formule

$$p = P(1 - \varepsilon \cos^2 \varphi),$$

où P est la parallaxe horizontale équatoriale du Soleil pour le jour J et ε l'aplatissement du globe. Si l'on voulait négliger l'aplatissement dans le calcul de t, il faudrait remplacer l'équation (2) par celle-ci :

$$z = z' - P \sin z'.$$

2° Pour obtenir directement l'instant du lever ou du coucher d'un

bord du Soleil, il faut remplacer la valeur (5) de z' par

$$z' = 90^\circ + d + r \pm \Delta,$$

en prenant le signe + ou — suivant qu'il s'agit du bord inférieur ou supérieur et désignant par Δ le demi-diamètre apparent du Soleil.

129e Exercice.

Étant donnés l'angle horaire τ d'un lever ou coucher du centre du Soleil, en un lieu de colatitude connue φ, trouver la date du lever ou du coucher et la longitude du lieu.

Solution : Soit $\mathfrak{D}$ la déclinaison du Soleil au moment de ce lever ou coucher; on a la relation connue

$$\cos\tau = -\operatorname{tg}\varphi . \operatorname{tg}\mathfrak{D}. \tag{1}$$

Après avoir calculé $\mathfrak{D}$ au moyen de l'équation (1), on cherchera dans la *Connaissance des temps* le jour j et l'heure solaire vraie de Paris h_v correspondants. La longitude $\mathfrak{L}$ du lieu sera

$$\mathfrak{L} = \tau - h_v. \tag{2}$$

On trouvera deux valeurs pour j et h_v et, par suite, pour $\mathfrak{L}$.

130e Exercice.

Étant donnés la date j, l'angle horaire τ d'un lever ou coucher de Soleil en un lieu de longitude connue $\mathfrak{L}$, trouver la colatitude φ du lieu et la déclinaison $\mathfrak{D}$ du Soleil à l'époque du lever ou du coucher.

Solution : L'heure solaire vraie h_v de Paris, à cette époque, est déterminée par la relation

$$\mathfrak{L} = \tau - h_v.$$

Ayant le jour j et l'heure vraie h_v du lever ou coucher, en temps de Paris, la *Connaissance des temps* donnera la déclinaison correspon-

dante $\mathfrak{D}$ du Soleil. On aura ensuite φ par l'équation (1) ou

$$\operatorname{tg} \varphi = -\cos \tau \operatorname{cotg} \mathfrak{D}.$$

EXERCICES ANALOGUES.

On transformera les deux exercices précédents en d'autres analogues en remplaçant la donnée τ par l'azimut α du lever ou du coucher du Soleil.

131e Exercice.

Déterminer l'heure avec un chronomètre moyen par des observations de hauteurs correspondantes du Soleil avant et après midi, ou bien avant et après minuit.

Solution : 1° Si la déclinaison $\mathfrak{D}$ du Soleil était invariable, la moyenne arithmétique des heures marquées par le chronomètre pour deux hauteurs égales du Soleil, l'une à l'est, l'autre à l'ouest, serait l'heure de ce chronomètre à midi vrai. Mais il faut tenir compte de la variation de $\mathfrak{D}$. Soient :

φ = la latitude du lieu de l'observateur;
$\mathfrak{D}$ = la déclinaison du Soleil à midi vrai du lieu ;
$\delta\mathfrak{D}$ = l'accroissement de $\mathfrak{D}$ entre ce midi et la hauteur prise à l'ouest ;
h = la hauteur du centre du Soleil à chacune des deux observations correspondantes ;
T_0 = la moyenne des heures observées au chronomètre ;
δT_0 = la correction de T_0 correspondante à $\delta\mathfrak{D}$;
θ = la moitié du temps écoulé entre les deux observations.

On a évidemment, pour ces deux observations, les équations respectives

$$(1) \quad \begin{cases} \sin h = \sin \varphi \sin (\mathfrak{D} - \delta\mathfrak{D}) + \cos \varphi \cos (\mathfrak{D} - \delta\mathfrak{D}) \cos (\theta + \delta T_0), \\ \sin h = \sin \varphi \sin (\mathfrak{D} + \delta\mathfrak{D}) + \cos \varphi \cos (\mathfrak{D} + \delta\mathfrak{D}) \cos (\theta - \delta T_0), \end{cases}$$

si nous y substituons

$$\sin (\mathfrak{D} \pm \delta\mathfrak{D}) = \sin \mathfrak{D} \cos \delta\mathfrak{D} \pm \cos \mathfrak{D} \sin \delta\mathfrak{D},$$
$$\cos (\mathfrak{D} \pm \delta\mathfrak{D}) = \cos \mathfrak{D} \cos \delta\mathfrak{D} \mp \sin \mathfrak{D} \sin \delta\mathfrak{D},$$
$$\cos (\theta \pm \delta T_0) = \cos \theta \cos \delta T_0 \mp \sin \theta \sin \delta T_0,$$

et si nous soustrayons la première équation (1) de la seconde, nous aurons

$$0 = 2 \sin \varphi \cos \mathfrak{D} \sin \delta\mathfrak{D} - 2 \cos \varphi \sin \mathfrak{D} \sin \delta\mathfrak{D} \cos \theta \cos \delta T_0$$
$$+ 2 \cos \varphi \cos \mathfrak{D} \cos \delta\mathfrak{D} \sin \theta \sin \delta T_0,$$

d'où

$$\sin \delta T_0 = - \frac{\operatorname{tg} \delta\mathfrak{D} . \operatorname{tg} \varphi}{\sin \theta} + \frac{\operatorname{tg} \delta\mathfrak{D} . \operatorname{tg} \mathfrak{D}}{\operatorname{tg} \theta} \cos \delta T_0,$$

ce qui conduit, avec une approximation suffisante, à la formule

$$(2) \qquad \delta T_0 = - \frac{\delta\mathfrak{D}}{15} \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin \theta} - \frac{\operatorname{tg} \mathfrak{D}}{\operatorname{tg} \theta} \right),$$

qui donne δT_0 exprimé en temps.

On aura d'ailleurs pour $\delta\mathfrak{D}$,

$$\delta\mathfrak{D} = m.\theta,$$

m étant la variation horaire de $\mathfrak{D}$, variation donnée par la *Connaissance des temps.*

2° Comme les suppléments des distances zénithales observées avant et après minuit, sous la latitude φ, ne sont autre chose que les distances zénithales observées au même moment, sous la latitude des antipodes $-\varphi$, il suffit de changer φ en $-\varphi$ dans la formule (2) pour avoir la correction relative au midi vrai des antipodes ou au minuit vrai de l'observateur. On a ainsi, pour cette correction,

$$(3) \qquad \delta T_0 = + \frac{\delta\mathfrak{D}}{15} \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin \theta} + \frac{\operatorname{tg} \mathfrak{D}}{\operatorname{tg} \theta} \right).$$

Si l'on pose

$$A = - \frac{\theta}{15 \sin \theta}, \qquad B = \frac{\theta}{15 \operatorname{tg} \theta},$$
$$a = Am \operatorname{tg} \varphi, \qquad b = Bm \operatorname{tg} \mathfrak{D},$$

les formules (2) et (3) peuvent s'écrire

$$\delta T_0 = \mp a + b.$$

On prendra le signe — ou le signe + devant a suivant que les

deux observations comprendront midi ou minuit. On pourra d'ailleurs construire des tables spéciales donnant A, B avec l'argument θ.

132e Exercice.

Calculer le temps sidéral, le temps vrai, le temps moyen du lever et du coucher de α Andromède, *le 25 mai 1885, à l'observatoire de Besançon.*

Solution : Indiquons la suite des calculs que le lecteur devra exécuter :

1° La *Connaissance des temps,* de l'année 1885, donne les coordonnées équatoriales $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ de α Andromède pour le 25 mai.

2° Avec $\mathcal{D}$ et la colatitude φ de Besançon, 42° 45', on calculera les angles horaires $-t$ et $+t$ de l'étoile à son lever et à son coucher.

3° Les heures sidérales θ, θ' du lever et du coucher sont

$$\theta = -t + \mathcal{A}, \quad \theta' = t + \mathcal{A}.$$

4° On convertira θ, θ' en époques moyennes correspondantes, T_m, T'_m à l'aide du temps sidéral, à midi moyen, le 25 mai, donné par la *Connaissance des temps* de 1885.

5° Enfin, la valeur, pour le même jour, de l'équation du temps permettra de passer des époques T_m, T'_m aux époques vraies correspondantes.

CHAPITRE III

Précession et nutation. — Changement de coordonnées des étoiles. — Translation du Soleil.

133e Exercice.

Établir directement les formules de précession annuelle.

Solution : On peut trouver directement les formules de précession annuelle de la manière suivante :

A l'époque t_0, soient *(fig. 92)* :

AB l'écliptique de pôle Q;
X l'équinoxe moyen;
l, λ les coordonnées écliptiques d'une étoile M, c'est-à-dire sa longitude et sa latitude.

On aura

$$l = XG, \quad \lambda = MG.$$

A l'époque t, soient :

AC l'équateur moyen de pôle P;
A_1 l'équinoxe moyen,
donnés par les quantités

$$XA = \psi_m, \quad PQ = \omega_m, \quad AA_1 = \tau;$$

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$ l'ascension droite et la déclinaison moyennes de M.

On aura

$$\mathcal{A} = A_1H, \quad \mathcal{D} = MH.$$

Il est évident que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$ sont des fonctions des constantes l, λ et de ψ, ω, τ, variables avec t.

$$\text{Les projections de OM}\left\{\begin{array}{l} \text{sur les axes}\left\{\begin{array}{l}\text{OA}\\ \text{OB}\\ \text{OQ}\end{array}\right. \text{sont}\left\{\begin{array}{l}\cos\lambda\cos(l+\psi_m),\\ \cos\lambda\sin(l+\psi_m),\\ \sin\lambda,\end{array}\right.\\ \text{sur les axes}\left\{\begin{array}{l}\text{OA}\\ \text{OC}\\ \text{OP}\end{array}\right. \text{sont}\left\{\begin{array}{l}\cos\mathcal{D}\cos(\mathcal{A}+\tau),\\ \cos\mathcal{D}\sin(\mathcal{A}+\tau),\\ \sin\mathcal{D},\end{array}\right.\end{array}\right.$$

donc, on a, par le théorème des projections de projections ou les formules de transformation des coordonnées rectilignes,

$$(1)\quad \cos\lambda\cos(l+\psi_m) = \cos\mathcal{D}\cos(\mathcal{A}+\tau),$$

$$(2)\quad \cos\lambda\sin(l+\psi_m) = \cos\mathcal{D}\sin(\mathcal{A}+\tau)\cos\omega_m + \sin\mathcal{D}\sin\omega_m,$$

$$(3)\quad \sin\lambda = -\cos\mathcal{D}\sin(\mathcal{A}+\tau)\sin\omega_m + \sin\mathcal{D}\cos\omega_m.$$

Ces relations, qui résultent d'ailleurs immédiatement de la considération du triangle PQM, donnent $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$ en fonction des constantes l, λ et des variables avec le temps ψ_m, ω_m, τ. Différentions (1) et (3) par rapport à t, nous aurons en tenant compte de (2) :

$$(4)\quad \frac{d\psi_m}{dt}\cos\lambda\sin(l+\psi_m) = \sin\mathcal{D}\cos(\mathcal{A}+\tau)\frac{d\mathcal{D}}{dt} + \cos\mathcal{D}\sin(\mathcal{A}+\tau)\frac{d(\mathcal{A}+\tau)}{dt},$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\omega_m}{dt}\cos\lambda\sin(l+\psi_m) &= [\sin\mathcal{D}\sin(\mathcal{A}+\tau)\sin\omega_m + \cos\mathcal{D}\cos\omega_m]\frac{d\mathcal{D}}{dt}\\ &\quad - \cos\mathcal{D}\cos(\mathcal{A}+\tau)\sin\omega_m\frac{d(\mathcal{A}+\tau)}{dt}.\end{aligned}\right.$$

Ajoutons (4) et (5) après les avoir multipliés respectivement par $\cos(\mathcal{A}+\tau)\sin\omega_m$ et $\sin(\mathcal{A}+\tau)$; nous aurons, en tenant compte de la relation (2) et divisant par le facteur $\cos\lambda\sin(l+\psi_m)$ qui devient alors commun,

$$(6)\quad \frac{d\mathcal{D}}{dt} = \frac{d\psi_m}{dt}\cos(\mathcal{A}+\tau)\sin\omega_m + \frac{d\omega_m}{dt}\sin(\mathcal{A}+\tau),$$

où l et λ ne figurent plus.

Substituant dans (4) cette valeur de $\frac{d\mathfrak{D}}{dt}$ et celle de $\cos\lambda \sin(l+\psi_m)$ tirée de (2), on a :

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{d\psi_m}{dt}[\sin\mathfrak{D}\sin\omega_m\sin^2(\mathcal{A}+\tau)+\cos\mathfrak{D}\cos\omega_m\sin(\mathcal{A}+\tau)]\\ &=\sin\mathfrak{D}\sin(\mathcal{A}+\tau)\cos(\mathcal{A}+\tau)\frac{d\omega_m}{dt}+\cos\mathfrak{D}\sin(\mathcal{A}+\tau)\frac{(d\mathcal{A}+\tau)}{dt}.\end{aligned}\right.$$

Si nous remplaçons $\frac{d\omega_m}{dt}$, qui est excessivement petit, par zéro, et si nous négligeons τ, qui est très petit, dans les termes en $\frac{d\psi_m}{dt}$ qui sont eux-mêmes déjà petits, nous aurons

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt}=\frac{d\psi_m}{dt}\cdot\cos\mathcal{A}.\sin\omega_m,$$

$$\frac{d\psi_m}{dt}(\sin\mathfrak{D}\sin\omega_m\sin\mathcal{A}+\cos\mathfrak{D}\cos\omega_m)=\cos\mathfrak{D}\cdot\left(\frac{d\mathcal{A}}{dt}+\frac{d\tau}{dt}\right),$$

ou bien

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{d\mathcal{A}}{dt}&=m+n\operatorname{tg}\mathfrak{D}\sin\mathcal{A},\\ \frac{d\mathfrak{D}}{dt}&=n\cos\mathcal{A},\end{aligned}\right.$$

en posant

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}n&=\sin\omega_m\frac{d\psi_m}{dt},\\ m&=\cos\omega_m\frac{d\psi_m}{dt}-\frac{d\tau}{dt}.\end{aligned}\right.$$

Les formules (8) et (9) sont les formules de précession annuelle.

REMARQUE.

On emploie souvent ces formules pour calculer la précession de l'époque t à l'époque t', postérieure seulement d'un petit nombre

d'années, en multipliant la précession annuelle, pour l'époque moyenne arithmétique $\frac{1}{2}(t + t')$, par le nombre d'années $(t' - t)$.

L'approximation ainsi obtenue est généralement suffisante et du troisième ordre par rapport à $\frac{1}{2}(t' - t)$.

En effet, soit généralement $f(t)$, $f(t')$ les valeurs d'une fonction, telle que $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{D}$, dont la différence $f(t') - f(t)$ est demandée. Posons :

$$2x = t' + t, \qquad 2\Delta x = t' - t,$$

nous aurons

$$f(t) = f(x - \Delta x) = f(x) - \Delta x\, f'(x) + \frac{1}{1.2}\overline{\Delta x}^2 f''(x) - \ldots,$$

$$f(t') = f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x\, f'(x) + \frac{1}{1.2}\overline{\Delta x}^2 f''(x) + \ldots,$$

d'où

$$f(t') - f(t) = 2\Delta x\, f'(x) = (t' - t)\, f'\left(\frac{t' + t}{2}\right),$$

en négligeant le troisième ordre en Δx.

134^e Exercice.

Calculer les changements de coordonnées des étoiles, dus à une translation supposée du Soleil.

Solution : Soient à l'époque t *(fig. 93) :*

S le centre du Soleil pris pour celui de la sphère céleste ;
E ($\mathcal{A}$, $\mathcal{L}$) la position d'une étoile ;
e (a, p) la position du point de la sphère vers lequel le Soleil est supposé se diriger ;
SE $= d$ la distance de l'étoile au Soleil, prise pour rayon de la sphère ;
SS$' = \Delta$ le déplacement du Soleil dans la direction Se et pendant le temps $(t' - t)$;
Eε une droite égale et parallèle à SS$'$, mais dirigée en sens contraire ;
E$'$ l'extrémité du rayon de la sphère mené par ε.

Il est clair que E′ sera, à l'époque t', la position de l'étoile qui était en E à l'époque t. Désignons par $\mathcal{A}'$, $\mathcal{D}'$ les coordonnées équatoriales de E′, et posons :

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} + \delta\mathcal{A}, \qquad \mathcal{D}' = \mathcal{D} + \delta\mathcal{D}.$$

Il est facile de calculer $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{D}$ en supposant que la translation du Soleil n'a pas changé la direction des axes de coordonnées équatoriales.

Si nous posons E$e = u$, le triangle sphérique PEe donne

$$(1)\quad \begin{cases} \cos u = \cos p \cos \mathcal{D} + \sin p \sin \mathcal{D} \cos (a - \mathcal{A}), \\ \sin u \cos \mathrm{E} = \cos p \sin \mathcal{D} - \sin p \cos \mathcal{D} \cos (a - \mathcal{A}), \\ \sin u \sin \mathrm{E} = \sin p \sin (a - \mathcal{A}). \end{cases}$$

L'arc de grand cercle eE prolongé, passe par E′ et si nous posons EE′ $= \delta u$, le triangle rectiligne SEε donne

$$d.\sin \delta u = \Delta \sin (u + \delta u).$$

L'observation montre que $\frac{\Delta}{d}$ est une petite quantité, puisque les positions relatives des étoiles sont invariables sensiblement pendant plusieurs siècles consécutifs. Si nous négligeons le carré de cette quantité, nous aurons

$$(2)\qquad \delta u = \frac{\Delta}{d} \cdot \sin u.$$

On a d'ailleurs entre $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{D}$ et δu les relations

$$(3)\quad \begin{cases} \sin \mathcal{D}.\delta\mathcal{A} = - \delta u.\sin \mathrm{E}, \\ \delta\mathcal{D} = + \delta u.\cos \mathrm{E}, \end{cases}$$

évidentes géométriquement, ou faciles à tirer des formules 5ᵉ (3ᵉ type) et 3ᵉ (1ᵉʳ type) du tableau B des relations différentielles, donné au nº 16 du COURS, en appliquant ces formules au triangle PEe dans lequel on considère comme fixes l'angle e, le côté Pe, mais eE comme variant de δu.

Si l'on substitue dans les équations (3) à δu sa valeur (2), puis à

sin u sin E, sin u cos E leurs valeurs (1), on a

$$\delta\mathcal{A} = -\frac{\Delta}{d}\,\text{coséc}\,\mathcal{L}.\sin p \sin(a - \mathcal{A}),$$

$$\delta\mathcal{L} = +\frac{\Delta}{d}\,[\cos p \sin \mathcal{L} - \sin p \cos \mathcal{L} \cos(a - \mathcal{A})],$$

ou

$$\delta\mathcal{A} = -\varpi\,\text{coséc}\,\mathcal{L} \sin p \sin(a - \mathcal{A}),$$
$$\delta\mathcal{L} = +\varpi \cos p \sin(\mathcal{L} - \psi)\,\text{séc}\,\psi,$$

en posant

$$\varpi = \frac{\Delta}{d}, \quad \text{tg}\,\psi = \text{tg}.p \cos(a - \mathcal{A}).$$

CHAPITRE IV

Sur les taches du Soleil.

135e Exercice.

Comment varie le point le plus élevé du disque solaire, sur ce disque, avec la hauteur du Soleil?

Solution : Soient *(fig. 94)* :

P le pôle boréal de la sphère céleste;
Z le zénith;
S le centre du Soleil;
PS le cercle horaire de S;
a le point où PS rencontre le contour du disque solaire;
ZS le vertical de S;
m le point où il rencontre le même contour. m est le point le plus élevé du disque.

Posons :

$$Pz = 90^\circ - \varphi, \quad PS = 90^\circ - \mathfrak{D}, \quad zS = z.$$

En vertu du mouvement diurne seul, abstraction faite de tout autre mouvement pendant la durée d'un jour solaire, a reste fixe, mais m se déplace sur le disque supposé lié invariablement à la sphère céleste. La position de m, relative à a, est définie par l'angle S du triangle PZS ou l'angle parallactique q du Soleil. Cet angle est donné par la formule

$$\sin \varphi = \cos z \sin \mathfrak{D} + \sin z \cos \mathfrak{D} \cos q.$$

On a souvent besoin de connaître q, par exemple lorsqu'il s'agit de fixer sur un dessin ou sur une photographie du Soleil les positions de protubérances, de taches, relevées en les rapportant à l'horizon

Pendant le mouvement diurne, la variation de am ou q donne celle de m sur le disque solaire

136e Exercice

Ayant rapporté la position d'une tache σ du Soleil à S par des différences d'azimut et de hauteur, mesurées au théodolite, en conclure les différences correspondantes d'ascension droite et de déclinaison, telles qu'on les mesurerait à l'équatorial

Solution Nous ne développerons pas cet exercice facile Nous remarquerons seulement qu'il revient, sur le disque solaire, à faire tourner de l'angle q, dans le plan tangent en S à la sphère céleste, les axes, auxquels les premières différences sont rapportées, pour les faire coïncider avec les axes des dernières différences

137e Exercice

On a observé les époques de passage des bords et d'une tache du Soleil aux deux fils rectangulaires Ix, Iy *du réticule d'une lunette fixe Calculer les inclinaisons* α, β *de ces fils sur le mouvement diurne et la position de la tache relativement au centre de l'astre*

Solution 1° Pendant la durée de l'observation, soient Δ le diamètre apparent du Soleil et $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ les coordonnées équatoriales de son centre, qu'on peut tirer de la *Connaissance des temps* Désignons par

t_x, t'_x les époques de contact des 1er et 2e bords avec Ix,
t_y, t'_y — — Iy

De l'époque t_x à t'_x, le centre du Soleil passe de s en s' *(fig 95)* en décrivant l'arc de parallèle

$$ss' = 15\ (t'_x - t_x) \cos \mathcal{D},$$

mais le triangle rectangle msa donne

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\, ss' \sin \alpha,$$

ou, en remplaçant ss' par sa valeur,

$$(1) \qquad \Delta = \tfrac{1}{2}\, 15\, (t'_x - t_x) \cos \mathfrak{D} . \sin \alpha.$$

Pour le fil Iy, on a une relation semblable,

$$(2) \qquad \Delta = \tfrac{1}{2}\, 15\, (t'_y - t_y) \cos \mathfrak{D} \sin \beta.$$

On peut tirer de là α et β en prenant Δ, $\mathfrak{D}$ dans la *Connaissance des temps*. Si les fils sont bien rectangulaires, on devra avoir

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1,$$

et, en supposant cette condition remplie, on déterminera α par la formule

$$(1) \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{t'_x - t_x}{t'_y - t_y},$$

indépendante de Δ et $\mathfrak{D}$.

2° Soient T_x, T_y les époques observées du passage de la tache et

$$\tau_x = \tfrac{1}{2}\,(t_x + t'_x), \qquad \tau_y = \tfrac{1}{2}\,(t_y + t'_y),$$

les époques du passage du centre du Soleil par les fils I_x, I_y.

Si nous désignons par $\mathcal{A} + \delta\mathcal{A}$, $\mathfrak{D} + \delta\mathfrak{D}$ les coordonnées équatoriales de la tache, nous aurons évidemment, en négligeant les carrés de $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathfrak{D}$, les relations

$$T_x - \tau_x = p . \delta\mathcal{A} + q . \delta\mathfrak{D},$$
$$T_y - \tau_y = p' . \delta\mathcal{A} + q' . \delta\mathfrak{D},$$

qui expriment que $(T_x - \tau_x)$, $(T_y - \tau_y)$ ne dépendent que de $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathfrak{D}$ et où p, q, p', q' sont des coefficients faciles à déterminer.

Lorsque $\delta\mathfrak{D} = 0$, la valeur de $T_x - \tau_x$ est $p\delta\mathcal{A}$; mais alors $T_x - \tau_x = \frac{1}{15}\delta\mathcal{A}$. Donc, $p = \frac{1}{15}$. On voit de même que $p' = \frac{1}{15}$.

Lorsque $\delta\mathcal{A} = 0$, la valeur de $T_x - \tau_x$ est $q\delta\mathfrak{D}$; mais alors la tache est en m' sur le même cercle horaire que le centre s du Soleil, et la figure 96 montre que

$$15(T_x - \tau_x) = -(m'u) . \operatorname{séc}\mathfrak{D} = -(m's) \cot \alpha . \operatorname{séc}\mathfrak{D} = \cot \alpha . \operatorname{séc}\mathfrak{D} . \delta\mathfrak{D},$$

on a donc

$$q = \frac{1}{15} \cot \alpha . \text{séc}\, \mathfrak{D},$$

et on verrait de même que

$$q' = -\frac{1}{15} \operatorname{tg} \alpha . \text{séc}\, \mathfrak{D}.$$

Par suite, on a les formules

$$(2) \qquad \begin{cases} 15\,(T_x - \tau_x) = \delta\mathcal{A} + \cot \alpha . \text{séc}\, \mathfrak{D} . \delta\mathfrak{D}, \\ 15\,(T_y - \tau_y) = \delta\mathcal{A} - \operatorname{tg} \alpha . \text{séc}\, \mathfrak{D} . \delta\mathfrak{D}, \end{cases}$$

qui permettent de calculer facilement $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathfrak{D}$.

Au lieu de $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathfrak{D}$, on peut employer, pour déterminer la position d'une tache m, sa distance $\rho = sm$ au centre du Soleil et l'angle de position $\lambda = \widehat{m'sm}$ que fait la direction sm avec celle du cercle horaire allant de s au pôle nord; cet angle étant compté, sur la sphère céleste, du nord vers l'est.

On a évidemment

$$\delta\mathfrak{D} = \rho \cos \lambda, \qquad \delta\mathcal{A} = \rho \sin \lambda . \text{séc}\, \mathfrak{D}.$$

Les formules précédentes (2) peuvent donc s'écrire

$$(3) \qquad \begin{cases} 15 \cos \mathfrak{D} (T_x - \tau_x) = \rho (\sin \lambda + \cot \alpha \cos \lambda) = \rho \cos (\lambda - \alpha) \dfrac{1}{\sin \alpha}, \\ 15 \cos \mathfrak{D} (T_y - \tau_y) = \rho (\sin \lambda - \operatorname{tg} \alpha \cos \lambda) = \rho \sin (\lambda - \alpha) \dfrac{1}{\cos \alpha}, \end{cases}$$

α étant calculé par (1), les équations (3) donneront ρ et λ. Pour λ en particulier, on divise ces équations membre à membre, d'où

$$\operatorname{tg} (\lambda - \alpha) = \frac{T_y - \tau_y}{T_x - \tau_x} \cot \alpha,$$

et si l'on pose

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{T_y - \tau_y}{T_x - \tau_x} \cot \alpha,$$

on a

$$\lambda = \alpha + \alpha'.$$

ρ s'obtiendra ensuite par l'une ou l'autre des formules

$$\rho = \frac{2\Delta}{\cos\alpha'} \frac{(T_x - \tau_x)}{t'_x - t_x} = \frac{2\Delta\,(T_y - \tau_y)}{\sin\alpha'\,(t'_y - t_y)},$$

qui offrent une vérification et se tirent aisément de (1), (2), (3).

Nous avons supposé jusqu'ici que, pendant la durée des observations; le centre du Soleil décrit rigoureusement un parallèle céleste aa', mais, en réalité, il décrit un élément pp' de spirale incliné de i sur le parallèle où il se trouve *(fig. 97)*. Avec les valeurs observées des temps de passage de la tache et du centre du Soleil, les formules précédentes donnent donc l'angle de position λ rapporté à une perpendiculaire à pp'. Cet angle doit être corrigé de i ou calculé sur la formule

$$\lambda = \alpha + \alpha' + i.$$

138e Exercice.

Calculer directement la longitude et la latitude héliocentriques α et β d'une tache solaire M.

Solution : Soient *(fig. 98)*, à l'époque de l'observation de la tache :

T, S les centres de la Terre et du Soleil;

γTS le plan de l'écliptique qui coupe la sphère céleste géocentrique suivant le grand cercle γs et la sphère solaire suivant le grand cercle $\sigma\Gamma\sigma'$;

Tq, SQ les axes respectifs de ces grands cercles;

γe l'équateur; Tp l'axe du monde;

Tγ la ligne des équinoxes allant au point vernal γ; SΓ parallèle à Tγ;

ω l'obliquité de l'écliptique;

$\mathcal{A} = \gamma e$, $\mathcal{D} = se$, $\odot = \gamma s$, l'ascension droite, la déclinaison, la longitude du Soleil; ps son cercle horaire; $n'sn$ son parallèle;

M une tache solaire, vue de T en m sur la sphère céleste géocentrique;

$\delta\mathcal{A} = -ee'$, $\delta\mathcal{D} = n'm$ les variations de coordonnées équatoriales lorsqu'on passe de la position s du Soleil à la position m de la

tache, variations observées de la surface de la Terre et reduites a son centre par les formules connues de parallaxe,

$\rho = sm$, $\theta =$ angle de l arc sm avec la direction $s_\smile$ de l écliptique,

$\lambda = \widehat{psm}$, $\mu = \widehat{sn}$, $\tau = \widehat{\zeta se}$

Le triangle $mn's$ etant très petit, peut etre regarde comme recti ligne et donne immediatement les deux relations

(1) $$\begin{cases} \rho \cos \lambda = \delta \mathfrak{D}, \\ \rho \sin \lambda = \delta \mathfrak{h} \cos \mathfrak{D}, \end{cases}$$

qui permettent de calculer ρ et λ

Le triangle sphérique rectangle ζse donne τ par la relation

(2) $$\cos \tau = \sec \omega \cos \bigcirc,$$

on peut donc calculer θ par la formule évidente

(3) $$\theta = \lambda + \tau$$

Dans le triangle rectiligne TSM, désignons par φ l angle en S, par d et r les cotés TS, SM, nous aurons

$$\frac{\sin (\varphi + \rho)}{d} = \frac{\sin \rho}{r},$$

d'ou

(4) $$\sin (\varphi + \rho) = \frac{d}{r} \sin \rho = \frac{1}{\Delta} \sin \rho,$$

Δ etant le demi diamètre apparent du Soleil, équation qui déter mine φ

Connaissant $\bigcirc$, θ, φ, on calcule α, β par le triangle rectangle σMN de la sphère solaire, dans lequel

$$M\sigma = \varphi, \quad MN = \beta, \quad \sigma N = \sigma\Gamma + \Gamma N = r - \bigcirc + \alpha, \quad \sigma = \pi - \theta,$$

et qui donne immédiatement les formules

(5) $$\begin{cases} \operatorname{tg} (\bigcirc + \alpha) = \operatorname{tg} \varphi \cos \theta, \\ \sin \beta = \sin \varphi \sin \theta, \end{cases}$$

d une application facile

REMARQUE.

Les formules (1), (4), (5) montrent qu'une petite erreur d'observation sur $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{D}$ en entraîne une petite sur λ et ρ; mais, à cause de la faiblesse de Δ, une grande sur φ et, par suite, sur α, β.

L'observation des taches n'est donc pas une méthode bien précise pour déterminer la rotation du Soleil sur lui-même.

139e Exercice.

Calculer directement les coordonnées héliographiques a, b d'une tache solaire, connaissant la position N, I *de l'équateur solaire et* $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{D}$.

Solution : Nous avons vu, par les formules (1) de l'exercice précédent, que $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{D}$ permettent de calculer l'angle de position λ de la tache vue de T, et sa distance angulaire φ à T vue de S.

Soient, sur la sphère solaire S *(fig. 99)* :

$\Gamma\varepsilon$ l'écliptique;
AB l'équateur solaire;
P son pôle nord de rotation;
Sp la direction de l'axe du monde;
Γe le grand cercle parallèle à l'équateur terrestre;
SΓ la direction de la ligne des équinoxes;
$N = \Gamma A$ la longitude héliocentrique de A;
$I =$ l'inclinaison de AB sur l'écliptique;
M une tache; $a = AH$; $b = MH$;
σ la position de la terre vue de S, $\sigma M = \varphi$.

Menons les grands cercles $PB\sigma$, $p\sigma C$ et dans les deux triangles rectangles $AB\sigma$, $\Gamma C\sigma$ posons

$$\Gamma\sigma = \odot + 180^\circ, \quad \widehat{\Gamma\sigma C} = 90^\circ + G,$$
$$AB = L, \quad \widehat{B\sigma A} = 90^\circ + H, \quad B\sigma = D;$$

nous calculerons d'abord les quantités G, H, L, D indépendantes de

la tache, par les formules

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} G &= \operatorname{tg} \omega . \cos \odot, \\ \operatorname{tg} H &= \operatorname{tg} I . \cos (\odot - N), \\ \operatorname{tg} L &= \cos I . \operatorname{tg} (\odot - N), \\ \sin D &= \sin I . \sin (\odot - N), \end{aligned}$$

qui sont données immédiatement, la première par $\Gamma C \sigma$, les trois autres par $AB\sigma$.

Dans le triangle $PM\sigma$, on a :

$$PM = 90^\circ - b, \quad P\sigma = 90^\circ + D, \quad \widehat{P\sigma M} = \widehat{p\sigma M} - \widehat{p\sigma P};$$

mais

$$\widehat{p\sigma M} = \lambda, \quad \widehat{p\sigma P} = 180^\circ - (180^\circ + G + H) = -(G + H),$$

d'où

$$\widehat{P\sigma M} = \lambda + G + H, \quad \text{soit} = \chi,$$

et le même triangle donne a, b par les formules

$$\left\{ \begin{aligned} \sin b &= -\cos \varphi \sin D + \sin \varphi \cos D \cos \chi, \\ \sin (L - a) &= \sin \varphi \operatorname{séc} b \sin \chi. \end{aligned} \right.$$

EXERCICES PROPOSÉS

1. *En un lieu connu ($\mathfrak{L}$, φ), un jour donné j de 1885, on a mesuré la hauteur h du centre du Soleil. On demande l'heure vraie, l'heure moyenne et l'azimut du Soleil.*

2. *En un lieu donné, à une époque moyenne donnée, quels sont l'azimut et la hauteur d'une étoile connue?*

3. *En un lieu donné, à une époque donnée, calculer l'azimut et la hauteur du Soleil.*

Trouver le lieu où le Soleil est au zénith, les lieux pour lesquels il se lève ou se couche ou passe au méridien.

4. *En un lieu donné, à une époque donnée, calculer l'heure vraie ou moyenne du passage d'une étoile connue.*

5. *A une époque donnée, quels sont les lieux de la Terre qui voient le Soleil et une étoile connue se lever ou se coucher en même temps à cette époque?*

6. *Déduire les formules d'aberration et de parallaxe diurnes des formules d'aberration et de parallaxe annuelles* (nos 295, 297 du Cours), *en considérant le mouvement diurne circulaire de l'observateur comme un cas particulier de son mouvement elliptique annuel.*

7. *Les éléments de la rotation du Soleil étant connus approximativement par des observations anciennes, établir les formules générales qui permettent de les corriger, au moyen d'observations nouvelles, par application directe de la méthode des moindres carrés.*

LIVRE V

LUNE, PLANÈTES, PHÉNOMÈNES

140^e Exercice.

En un lieu A ($\mathcal{L}$, φ) *et pour un jour* J *donnés, calculer l'heure du lever ou du coucher de la Lune, en tenant compte de l'aplatissement de la Terre, de la dépression de l'horizon d, de la réfraction r et de la parallaxe p.*

Solution : La solution est la même que pour le lever ou le coucher du Soleil. Il suffit donc de se reporter à l'exercice 128^e et de résoudre, comme nous l'avons indiqué, les équations (1), (2), (3), (4) appliquées à la Lune. Cependant nous devons remarquer que la variation des coordonnées $\mathcal{A}$, $\mathfrak{D}$ de la Lune étant beaucoup plus rapide que celle des coordonnées du Soleil, et non proportionnelle au temps, même dans l'intervalle d'un jour, il faudra remplacer préalablement l'équation (1) de l'exercice 128 par celle-ci :

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0 + b\,(t - \mathcal{L}) + c\,(t - \mathcal{L})^2,$$

où b, c sont des coefficients faciles à tirer des différences premières et secondes des valeurs de $\mathfrak{D}$, données d'heure en heure pour le jour J par la *Connaissance des temps.*

Ayant trouvé, à l'époque cherchée, l'angle horaire géocentrique t de la Lune pour le lieu A ou $(t - \mathcal{L})$ pour Paris, il ne restera plus,

pour obtenir l'heure du lever ou du coucher, qu'à trouver le temps moyen de A lorsque la Lune passe au méridien de longitude $(\mathcal{L} - t)$, problème facile à résoudre avec la *Connaissance des temps*.

141e Exercice.

Calculer la phase de la Lune pour une époque et un lieu donnés.

Solution : Soient *(fig. 100)*, à l'époque donnée :

T, L, S les centres de la Terre, de la Lune, du Soleil;
M le lieu donné à la surface de la Terre;
MP la direction de l'axe du monde.

Prenons M pour centre et ML pour rayon de la sphère céleste.
Désignons par :

$axby$ le disque de la Lune ou l'intersection de la sphère céleste avec la sphère lunaire;
m le pôle de ce disque ou l'intersection de la Lune avec ML;
xcy le cercle d'illumination de la Lune; s son pôle situé sur LS;
xy la ligne des cornes; x son extrémité nord;
acb le grand cercle de la lune déterminé par le plan MLS;
AB le diamètre du disque lunaire déterminé par le plan PML du cercle horaire de L dont il fait partie sensiblement; A l'extrémité nord; B l'extrémité sud de ce diamètre;
$\mathrm{A}pm$ le cercle d'intersection de la sphère lunaire par le plan PML;
$\mathrm{L}p$ le rayon de la Lune parallèle à MP;
g la grandeur asc de la phase;
u l'angle de position $\widehat{\mathrm{AL}x}$ de la ligne des cornes xy, compté, à partir de A, positivement vers l'est ou dans le sens de la flèche f;
$(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ et $(\mathcal{A}', \mathcal{D}')$ les coordonnées équatoriales du Soleil et de la Lune, l'origine des axes coordonnés étant au centre de la Terre T;
$(\mathcal{A}_1, \mathcal{D}_1)$ ce que deviennent $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ lorsque, la direction des axes restant invariable, on transporte leur origine en L;
$(\mathcal{A}'_1, \mathcal{D}'_1)$ ce que deviennent $(\mathcal{A}', \mathcal{D}')$ lorsque, la direction des axes restant invariable, on transporte leur origine en M.

Pour l'époque donnée, on trouve $(\mathcal{A}, \mathcal{D}), (\mathcal{A}', \mathcal{D}')$ dans la *Connaissance des temps* et on en tire facilement $(\mathcal{A}_1, \mathcal{D}_1), (\mathcal{A}'_1, \mathcal{D}'_1)$, savoir

$(\mathcal{A}'_1, \mathcal{D}_1)$ par les formules ordinaires de parallaxe appliquées au lieu donné M,

$(\mathcal{A}_1, \mathcal{D}_1)$ par les mêmes formules appliquées au lieu terrestre μ situé sur TL, après avoir remplacé, dans ces formules, le rayon ρ ou Tμ par la distance $d =$ TL.

A la suite de ces calculs préliminaires et faciles, considérons le triangle sphérique lunaire pms dans lequel

$$ps = \mathcal{D}_1, \qquad pm = \pi - \mathcal{D}'_1, \qquad ms = \pi - g,$$
$$\hat{p} = \pi + \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_1, \qquad \hat{m} = \frac{\pi}{2} - u$$

Il nous donne immédiatement

$$(1) \begin{cases} \cos g = \cos \mathcal{D}_1 \cos \mathcal{D}_1 + \sin \mathcal{D}_1 \sin \mathcal{D}_1 \cos(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_1), \\ \sin g \sin u = \cos \mathcal{D}_1 \sin \mathcal{D}_1 - \sin \mathcal{D}_1 \cos \mathcal{D}_1 \cos(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_1), \end{cases}$$

formules qui permettent de calculer g et u, c'est-à-dire la grandeur et l'angle de position de la phase.

REMARQUES

1° Le point nord A du disque lunaire sera éclairé et le point sud B obscur, ou inversement, suivant que u, toujours compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, sera positif ou négatif, c'est-à-dire d'après la 2° équation (1) où $\sin g$ est toujours positif, suivant que

$$\operatorname{tg} \mathcal{D}'_1 \gtrless \operatorname{tg} \mathcal{D}_1 \cos(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}'_1)$$

2° Au moment du passage de la Lune par le méridien du lieu M, l'intersection l de la sphère lunaire avec TL se trouve sur l'arc de grand cercle lunaire Apm et l'on a évidemment

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}, \quad \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}' + \omega',$$

en désignant par ω' la parallaxe de hauteur de la Lune, donnée par

la formule

$$\varpi' = \Pi' \sin z',$$

où Π' est la parallaxe horizontale de la Lune, z' sa distance zénithale méridienne.

3° Si, pour se préparer à une observation méridienne de la distance polaire de la Lune, on désire seulement connaître lequel des points A, B est éclairé ou observable, on peut, avec une approximation très suffisante, prendre

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}, \quad \mathcal{L}_1 = \mathcal{L},$$

pour le Soleil, en négligeant l'angle $\lambda = \widehat{LST}$; et

$$\mathcal{A}'_1 = \mathcal{A}', \quad \mathcal{L}'_1 = \mathcal{L}' + \varpi',$$

pour la Lune. On a, dès lors, pour choisir le bord observable dans la lunette qui renverse la Lune, la règle suivante :

$$\operatorname{tg} \mathcal{L}'_1 \gtrless \operatorname{tg} \mathcal{L} \cos(\mathcal{A} - \mathcal{A}') \begin{cases} > \text{bord inférieur,} \\ < \text{bord supérieur.} \end{cases}$$

142e Exercice.

Observation d'un passage de la Lune. — Réduction.

Solution : Afin de pointer le bord de l'astre en distance polaire aussi près que possible du méridien et d'observer les passages à des fils symétriques par rapport au fil moyen v_m, l'observateur combine l'ordre de ses opérations suivant qu'elles doivent porter sur le premier ou le deuxième bord.

Dans tous les cas, il observe, en premier lieu, les passages du bord aux trois fils c, b, a.

S'il s'agit du premier bord, il observe encore les passages aux six fils du milieu. Aussitôt après, il pointe en distance polaire le bord complètement éclairé, en faisant plusieurs pointés à la seconde ronde, symétrique de part et d'autre du méridien. Il termine en observant les passages aux fils A, B, C.

S'il s'agit du deuxième bord, après l'observation des passages aux

trois premiers fils, il pointe le bord inférieur ou supérieur en distance polaire et revient, aussitôt après, à l'observation des passages aux six fils du milieu et aux trois derniers.

Si, par accident, les passages n'ont pu être obtenus à des fils symétriques, la réduction au méridien se fait fil par fil de la manière suivante :

Soient *(fig. 101 et 102)*, à l'époque sidérale t du passage au fil v :

P le pôle; Z le zénith géocentrique;
O la position vraie ou géocentrique du point observé; $\mathfrak{D}$, θ, z sa déclinaison, son angle horaire, sa distance zénithale géocentrique ZO;
O' la position apparente de ce point; $\mathfrak{D}'$, θ', z' les quantités analogues de $\mathfrak{D}$, θ, z;
f la distance angulaire en temps du fil v au fil v_m;
ϖ la parallaxe horizontale équatoriale de la Lune;
OM, O'M' des arcs de grand cercle abaissés de O, O' perpendiculairement au méridien PZ;
$p = OO' = z' - z$;
$\rho =$ le rayon terrestre CA de l'observateur.

1° Le calcul de la parallaxe p en distance zénithale géocentrique est facile. Le triangle rectiligne CAB donne la relation

$$\frac{\sin p}{CA} = \frac{\sin z'}{CB} = \frac{\sin (z + p)}{CB},$$

si on prend pour unité de longueur le rayon équatorial de la Terre,

$$CA = \rho, \quad \frac{1}{CB} = \sin \varpi,$$

d'où

$$\sin p = \rho \sin \varpi \sin (p + z),$$

et, par suite,

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tg} p = \frac{\rho \sin \varpi . \sin z}{1 - \rho \sin \varpi \cos z}.$$

Développée en série, la formule (1) donne (voir n° 210 du Cours) :

$$p = \rho \sin \varpi \sin z + \tfrac{1}{2} (\rho \sin \varpi)^2 \sin 2z + \tfrac{1}{3} (\rho \sin \varpi)^3 \sin 3z + \ldots,$$

nous prendrons seulement le premier terme de cette série, négligeant ϖ^2, ϖ^3, ..., ou

$$z' = z + \rho \sin \varpi \sin z,$$

au même degré d'approximation, nous avons

$$\frac{\sin z}{\sin z'} = \frac{\sin z}{\sin z + \rho \sin \varpi \sin z \cos z} = 1 - \rho \sin \varpi \cos z,$$

mais $z = \varphi' - \mathfrak{D}$, en désignant par φ' la latitude géocentrique de l'observateur. On peut donc écrire

$$(1) \qquad \frac{\sin z}{\sin z'} = 1 - \rho \sin \varpi \cos (\varphi' - \mathfrak{D}).$$

D'ailleurs on a évidemment

$$\mathfrak{D}' - \mathfrak{D} = z' - z,$$

et, par suite,

$$(2) \qquad \mathfrak{D}' = \mathfrak{D} + \rho \sin \varpi \sin (\varphi' - \mathfrak{D}).$$

2° L'angle horaire apparent θ' est donné immédiatement par la formule usuelle

$$(3) \qquad \theta' = m + n \operatorname{tg} \mathfrak{D}' + (f + c - \varkappa) \operatorname{séc} \mathfrak{D}',$$

mais les triangles rectangles MOZ, M'O'Z et MOP, M'O'P donnent les relations

$$\frac{\sin M'O'}{\sin MO} = \frac{\sin z'}{\sin z} = \frac{\cos \mathfrak{D}' \sin \theta'}{\cos \mathfrak{D} \sin \theta},$$

d'où

$$\sin \theta = \sin \theta' \cdot \frac{\sin z}{\sin z'} \cdot \frac{\cos \mathfrak{D}'}{\cos \mathfrak{D}},$$

et, avec une approximation suffisante,

$$(4) \qquad \theta = \theta' \cdot \frac{\sin z}{\sin z'} \cdot \frac{\cos \mathfrak{D}'}{\cos \mathfrak{D}}.$$

3° Si $\delta \mathcal{A}$ est l'accroissement de l'ascension droite de la Lune en une seconde sidérale, $\dfrac{\theta}{1 - \delta \mathcal{A}}$ sera le temps sidéral que le bord

observé de la Lune mettra pour venir passer au méridien. L'ascension droite α de ce bord, au moment de son passage méridien, sera donc

$$\alpha = t + c_p + \frac{\theta}{1 - \delta \mathcal{A}},$$

ou, en désignant par $\Delta \mathcal{A}$ l'accroissement de $\mathcal{A}$ pendant une *seconde lunaire*, c'est-à-dire pendant que la lune va du méridien de l'observateur au suivant éloigné d'une seconde de longitude,

$$\alpha = t + c_p + \theta (1 + \Delta \mathcal{A}),$$

et si s est le demi-diamètre apparent géocentrique de la Lune, on aura, pour l'ascension droite $\mathcal{A}$ du centre de cet astre,

$$(5) \quad \mathcal{A} = t + c_p + \theta (1 + \Delta \mathcal{A}) \pm \frac{s}{15} (1 + \Delta \mathcal{A}) \operatorname{séc} \mathfrak{D} \begin{cases} + \ 1^{\text{er}} \text{ bord}, \\ - \ 2^{\text{e}} \text{ bord}, \end{cases}$$

formule dans laquelle on substitue à θ sa valeur tirée des relations (1), (2), (3), (4).

Si on pose

$$A = 1 - \rho \sin \varpi \cos (\varphi' - \mathfrak{D}),$$
$$F = A (1 + \Delta \mathcal{A}) \operatorname{séc} \mathfrak{D},$$

on aura

$$(1 + \Delta \mathcal{A}) \theta = Ff + [m + n \operatorname{tg} \mathfrak{D}' + (c - \varkappa) \operatorname{séc} \mathfrak{D}'] F \cos \mathfrak{D}',$$

et, par suite,

$$(6) \quad \mathcal{A} = t + c_p + Ff + [m + n \operatorname{tg} \mathfrak{D}' + (c - \varkappa) \operatorname{séc} \mathfrak{D}'] F \cos \mathfrak{D}' \pm \frac{s}{15} (1 + \Delta \mathcal{A}) \operatorname{séc} \mathfrak{D}.$$

REMARQUES.

I. Comme m, n, $(c - \varkappa)$ sont de très petites quantités, on peut, pour valeur approchée du multiplicateur de $[m + n \operatorname{tg} \mathfrak{D}' + (c - \varkappa) \operatorname{séc} \mathfrak{D}']$, prendre

$$F \cos \mathfrak{D}' = \frac{1}{1 - \delta \mathcal{A}} = 1 + \Delta \mathcal{A},$$

et la formule (6) devient celle employée à l'observatoire de Paris.

II. Le terme Ff se nomme réduction au fil moyen v_m. Il est inutile

d'en tenir compte quand on observe à des fils symétriques relativement à v_m, parce qu'il disparaît dans la moyenne de ces fils.

III. Pour le Soleil et les planètes, la formule (6) est applicable sous une forme plus simple. On peut alors y faire $\varpi = 0$, la parallaxe n'ayant sur $\mathcal{A}$ qu'un effet insensible.

143e Exercice.

Calculer les coordonnées équatoriales $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ de la Lune pour le midi moyen du 15 mai 1885, à Paris, en partant de ses coordonnées écliptiques λ, β.

Calcul : On trouve dans la *Connaissance des temps,* pour le 15 mai 1885,

$$\lambda = 66^\circ 38' 0'',9, \qquad \beta = -\ 4^\circ 33' 30'',6,$$
$$\omega = 23^\circ 27' 5'',45,$$

et, en appliquant les formules du n° 255 du COURS, on a le tableau suivant :

$\log \operatorname{tg} \beta = \bar{2},9016.170\ n$	$\log \operatorname{tg} \lambda = 0,3644.731$	$\log \sin \mathcal{A} = \bar{1},9593.308$
$\log \sin \lambda = \bar{1},9628.366$	$\log \cos (M + \omega) = \bar{1},9769.878$	$\log \operatorname{tg} (M + \omega) = \bar{1},5242.101$
$\log \operatorname{tg} M = \bar{2},9387.804\ n$	$\log \operatorname{séc} M = 0,0016.318$	$\operatorname{tg} \mathcal{D} = \bar{1},4835.409$
$M = -\ 4^\circ 57' 49'',70$	$\log \operatorname{tg} \mathcal{A} = 0,3430.927$	$\mathcal{D} = 16^\circ 56' 1'',6$
$\omega = 23\ 27\ 5,45$	$\mathcal{A} = 65^\circ 35' 21'',58$	
$M + \omega = 18\ 29\ 15,75$	$= 4^h 22^m 21^s,44$	

144e Exercice.

Calculer l'heure moyenne t du passage méridien de la Lune à Paris le 15 mai 1885.

Calcul : La *Connaissance des temps* donne pour midi moyen du 15 mai 1885, à Paris,

$\mathcal{A}_☾ = 4^h 22^m 21^s,44$	mouvement du $\odot_m$ en $1^{j.m.} = \mu_\odot =$	$3^m 56^s,56$
$\mathcal{A}_{\odot_m} = 3\ 33\ 29^s,02$	de ☾ $= \mu_☾ =$	$61\ 40^s,80$
$0^h 48^m 52^s,42$	$24^h + \mu_\odot - \mu_☾$	$= 23^h\ 2^m 15^s,96$
$\mathcal{A}_☾ - \mathcal{A}_{\odot_m} = 2932^s,42.$		$= 82935^s,76$

Or, on a évidemment $t = \dfrac{\mathcal{A}_{☾} - \mathcal{A}_{☉ n}}{24 - (\mu_{☾} - \mu_{☉})} 24$

$$\begin{aligned} \log 24 &= 1{,}380\ 2112 \\ \log (\mathcal{A}_{☾} - \mathcal{A}_{☉}) &= 3{,}467\ 2262 \\ c^t \log (24 + \mu_{☉} - \mu_{☾}) &= \bar{5}{,}081\ 2582 \\ \hline \log t &= \bar{1}{,}928\ 6956 \\ t &= +\ 50^m\ 9 \end{aligned}$$

En partant de ce résultat, on peut calculer une valeur plus approchée de $\mu_{☾}$ et recommencer le calcul pour avoir une valeur plus exacte de t. Mais une première approximation suffit pour se préparer à observer le passage.

145° Exercice

Calculer, pour le 25 mai 1885, l'ascension droite $\mathcal{A}_{☾}$ de la Lune lorsqu'elle traverse le méridien de 14 heures.

Calcul. Pour ce jour, la *Connaissance des temps* donne à 0^h et 1^h temps moyen de Paris, l'ascension droite $\mathcal{A}_{☾}$ de la Lune et le temps sidéral θ.

0^h $\mathcal{A}_{☾} = 13^h 39^m 47^s{,}60$ $\theta = 4^h 12^m 54^s{,}57$ $\theta - \mathcal{A}_{☾} = 14^h 33^m 6^s{,}97$

1^h $13\ 41\ 50^s{,}10$ $5\ 13\ 4^s{,}43$ $15\ 31\ 14^s{,}33$

les variations horaires de $\mathcal{A}_{☾}$ et de $\theta - \mathcal{A}_{☾}$ ou de l'angle horaire $h_{☾}$ de la Lune sont

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A}_{☾} &= 2^m 2^s{,}50 = 122^s{,}50, \\ \delta h_{☾} &= 58\ 7{,}36 = 3487^s{,}36 \end{aligned}$$

L'angle horaire de la Lune à Paris, $h_{☾}$, définit le méridien contenant la Lune pour la valeur correspondante de $\mathcal{A}_{☾}$. Si $(\mathcal{A}_{☾} + x)$ est l'ascension droite demandée, on a la proportion

$$\frac{x}{\delta \mathcal{A}_{☾}} = \frac{14^h - \mathcal{A}_{☾}}{\delta h_{☾}} = - \frac{1986{,}97}{\delta h_{☾}},$$

d'où

$$x = -69^s,79 = -1^m 9^s,79,$$
$$\mathcal{A}_☾ + x = 13^h 38^m 37^s,81.$$

146e Exercice.

Calculer la distance angulaire Δ de la Lune à α Aigle pour le 14 septembre 1885, à 3 heures, temps moyen de Paris.

Calcul : Données tirées de la *Connaissance des temps :*

☾	$\mathcal{A} = 16^h\ 9^m 46^s,15,$	$\mathcal{D} = -16^\circ\ 2'53'',1$
correction Newcomb, ε	$-0^s,92,$	$+1'',9$
	$16\ \ 9\ \ 45^s,23,$	$-16\ \ 2\ \ 51'',2$
✶	$\mathcal{A}' = 19\ \ 45\ \ 13^s,04,$	$\mathcal{D}' = +\ 8\ 34\ 20'',1$

Formules.

$$\mathfrak{L} = \mathcal{A}' - \mathcal{A} = 3^h 35^m 27^s,81 = 53^\circ 51' 57'',15,$$
$$\cot \varphi = \cos \mathfrak{L} \cot \mathcal{D}',$$
$$\cos \Delta = \sin \mathcal{D}' \cos(\mathcal{D} - \varphi)\ \text{cosé}c\ \varphi.$$

Tableau du calcul logarithmique.

$\cos \mathfrak{L} =$	$\bar{1},7706.145$	$\sin \mathcal{D}' =$	$\bar{1},1733.508$
$\cot \mathcal{D}' =$	$0,8217.703$	$\cos(\mathcal{D} - \varphi) =$	$\bar{1},9358.233$
$\cot \varphi =$	$0,5923.848$	$=$	$\bar{1},1091.741$
$\varphi =$	$14^\circ 20' 22'',4$	$\sin \varphi =$	$\bar{1},3938.697$
$\mathcal{D} =$	$-16\ \ 2\ \ 51'',2$	$\cos \Delta =$	$\bar{1},7153.044$
$\mathcal{D} - \varphi =$	$-30\ \ 23\ \ 13'',6$	$\Delta =$	$58^\circ 43' 26''$

147e Exercice.

Calculer la distance angulaire Δ de la Lune au Soleil, le 20 mai 1885 à 3 heures, temps moyen de Paris.

Calcul : Données de la *Connaissance des temps :*

☾	$\mathcal{A} = 9^h 31^m 50^s,23$		$\mathcal{D} = +11^\circ\ 4'\ 55'',5$
	$\varepsilon = \quad -1^s,03$		$+\ 3'',9$
	$9\ 31\ 49^s,20$		$+\ 11\ \ 4\ 59'',4$
⊙	$\mathcal{A}' = 3\ 49\ 30^s,46$		$\mathcal{D}' = +\ 20\ \ 4\ 14'',1$
	$3.\delta = \quad +\ 29^s,99$		$+\ 1\ 32'',8$
	$3\ 50\ \ 0^s,45$		$20\ \ 5\ 46'',9$

$$\mathcal{A} - \mathcal{A}' = 5\ 41\ 48^s,75$$
$$= 85^\circ 27'\ 11'',25 = \mathcal{L}.$$

Tableau du calcul logarithmique.

$\sin \mathcal{D} = \bar{1},283.83$	$\cos \mathcal{D} = \bar{1},991.82$	$r = 0,043.79$
$\sin \mathcal{D}' = \bar{1},536.05$	$\cos \mathcal{D}' = \bar{1},972.72$	$\log a = 0,279.69$
$m = \bar{2},819.88$	$\cos \mathcal{L} = \bar{2},899.13$	$\cos \Delta = \bar{1},143.36$
	$n = \bar{2},863.67$	$\Delta = 82^\circ 0' 13''$

REMARQUE.

Dans les deux exercices précédents, $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{A}'$, $\mathcal{D}'$, par suite Δ, sont affectés de l'aberration annuelle. Δ est donc la distance angulaire qui serait mesurée directement au sextant par un observateur situé au centre de la Terre.

148e Exercice.

Calculer les coordonnées équatoriales géocentriques D, $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ *d'une planète en fonction de l'anomalie excentrique* E.

Solution : Reportons-nous aux relations établies dans le n° 380 du Cours; accentuons les lettres a, b, c sans en changer la signification et conservons les autres notations. Remplaçons u par sa valeur $\varpi + \theta - \Omega$ et posons

$$A' = A + \varpi - \Omega, \qquad B' = B + \varpi - \Omega, \qquad C' = C + \varpi - \Omega,$$

nous aurons, pour les coordonnées rectilignes équatoriales et hélio-

centriques de la planète,

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin a' \sin (A' + \theta), \\ y_1 &= r \sin b' \sin (B' + \theta), \\ z_1 &= r \sin c' \sin (C' + \theta); \end{aligned}$$

si nous développons et remplaçons $r \cos \theta$, $r \sin \theta$ par leurs expressions en E, savoir :

$$\begin{aligned} r \cos \theta &= a (\cos E - \sin \varphi), \\ r \sin \theta &= a \cos \varphi \sin E, \end{aligned}$$

a désignant actuellement le demi-grand axe de l'orbite de la planète, $\sin \varphi$ son excentricité, il vient :

$$\begin{aligned} x_1 &= a \sin a' \sin A' \cos E - a \sin \varphi \sin a' \sin A' + a \cos \varphi \sin a' \cos A' \sin E, \\ y_1 &= a \sin b' \sin B' \cos E - a \sin \varphi \sin b' \sin B' + a \cos \varphi \sin b' \cos B' \sin E, \\ z_1 &= a \sin c' \sin C' \cos E - a \sin \varphi \sin c' \sin C' + a \cos \varphi \sin c' \cos C' \sin E. \end{aligned}$$

Posons

$$(1) \left\{ \begin{aligned} \lambda_x \cos L_x &= a \cos \varphi \sin a' \cos A', & \lambda_y \cos L_y &= a \cos \varphi \sin b' \cos B', \\ \lambda_x \sin L_x &= a \sin a' \sin A', & \lambda_y \sin L_y &= a \sin b' \sin B', \\ v_x &= - a \sin \varphi \sin a' \sin A', & v_y &= - a \sin \varphi \sin b' \sin B', \\ & & \lambda_z \cos L_z &= a \cos \varphi \sin c' \cos C', \\ & & \lambda_z \sin L_z &= a \sin c' \sin C', \\ & & v_z &= - a \sin \varphi \sin c' \sin C', \end{aligned} \right.$$

nous aurons

$$(2) \left\{ \begin{aligned} D \cos \mathfrak{D} \cos \mathfrak{A} &= \lambda_x \sin (L_x + E) + v_x + X, \\ D \cos \mathfrak{D} \sin \mathfrak{A} &= \lambda_y \sin (L_y + E) + v_y + Y, \\ D \sin \mathfrak{D} &= \lambda_z \sin (L_z + E) + v_z + Z, \end{aligned} \right.$$

X, Y, Z étant les coordonnées rectilignes géocentriques du Soleil, données par la *Connaissance des temps*.

Les neuf constantes (1) étant calculées, les formules (2) donneront D, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{A}$ avec économie de travail si l'on veut les coordonnées géocentriques d'un grand nombre de positions de la planète.

ÉCLIPSES DE SOLEIL

Soient, à une époque quelconque

$\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$, D les coordonnées géocentriques équatoriales de la Lune L,
$\mathcal{A}'$, $\mathcal{D}'$, D' les coordonnées analogues du Soleil S,
a, p les coordonnées de la direction Oz menée parallèlement à LS par le centre O de la Terre,
G la distance LS des centres du Soleil et de la Lune.

1° Axe des cônes d'ombre et pénombre. — Le triangle rectiligne OLS, projeté sur les axes de coordonnées équatoriales, donne les relations

$$(1)\quad \begin{cases} G \sin p \cos a = D' \sin \mathcal{D}' \cos \mathcal{A}' - D \sin \mathcal{D} \cos \mathcal{A}, \\ G \sin p \sin a = D' \sin \mathcal{D}' \sin \mathcal{A}' - D \sin \mathcal{D} \sin \mathcal{A}, \\ G \cos p = D' \cos \mathcal{D}' - D \cos \mathcal{D}, \end{cases}$$

permettant de calculer a, p, G qui diffèrent respectivement assez peu de $\mathcal{A}'$, $\mathcal{D}'$, D' à cause de la petitesse de D devant D'. Les différences sont même extrêmement petites aux époques d'une éclipse de Soleil, à cause de la petitesse de l'angle $\widehat{LOS}$ qui vient encore les diminuer.

Si nous ajoutons les deux premières relations (1) multipliées respectivement par $\cos a$, $\sin a$, nous avons

$$G \sin p = D' \sin \mathcal{D}' \cos (a - \mathcal{A}') - D \sin \mathcal{D} \cos (a - \mathcal{A}),$$

ou, en négligeant le carré des petites quantités $(a - \mathcal{A}')$, $(a - \mathcal{A})$

$$(2)\qquad G \sin p = D' \sin \mathcal{D}' - D \sin \mathcal{D}.$$

Les équations (1), (2) donnent immédiatement $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{tg} p$ si l'on

divise la seconde par la première et la quatrième par la troisième. Mais il convient de calculer $(a - \mathcal{A}')$, $(p - \mathcal{L}')$ qui peuvent, à cause de leur petitesse, s'exprimer très simplement avec une grande approximation.

En ajoutant les deux premières équations (1) multipliées respectivement d'abord par $\cos \mathcal{A}'$, $\sin \mathcal{A}'$, puis par $-\sin \mathcal{A}'$, $\cos \mathcal{A}'$, nous obtenons

$$(3)\quad \begin{cases} G \sin p \cos (a - \mathcal{A}') = D' \sin \mathcal{L}' - D \sin \mathcal{L} \cos (\mathcal{A} - \mathcal{A}'), \\ G \sin p \sin (a - \mathcal{A}') = -D \sin \mathcal{L} \sin (\mathcal{A} - \mathcal{A}'). \end{cases}$$

En ajoutant la dernière équation (1) et l'équation (2) multipliées respectivement d'abord par $\cos \mathcal{L}'$, $\sin \mathcal{L}'$, puis par $-\sin \mathcal{L}'$, $\cos \mathcal{L}'$, nous obtenons de même

$$(4)\quad \begin{cases} G \cos (p - \mathcal{L}') = D' - D \cos (\mathcal{L} - \mathcal{L}'), \\ G \sin (p - \mathcal{L}') = -D \sin (\mathcal{L} - \mathcal{L}'). \end{cases}$$

Les relations (3) et (4) divisées membre à membre donnent :

$$(5)\qquad \operatorname{tg} (a - \mathcal{A}') = -\frac{\dfrac{D}{D'} \dfrac{\sin \mathcal{L}}{\sin \mathcal{L}'} \sin (\mathcal{A} - \mathcal{A}')}{1 - \dfrac{D}{D'} \dfrac{\sin \mathcal{L}}{\sin \mathcal{L}'} \cos (\mathcal{A} - \mathcal{A}')},$$

$$(6)\qquad \operatorname{tg} (p - \mathcal{L}') = -\frac{\dfrac{D}{D'} \sin (\mathcal{L} - \mathcal{L}')}{1 - \dfrac{D}{D'} \cos (\mathcal{L} - \mathcal{L}')},$$

ou bien, à cause de la petitesse de $\frac{D}{D'}$, $(\mathcal{A} - \mathcal{A}')$, $(\mathcal{L} - \mathcal{L}')$, les formules très approchées

$$(7)\qquad a = \mathcal{A}' - H \frac{\sin \mathcal{L}}{\sin \mathcal{L}'} (\mathcal{A} - \mathcal{A}'),$$

$$(8)\qquad p = \mathcal{L}' - H (\mathcal{L} - \mathcal{L}'),$$

en posant

$$H = \frac{D}{D'}.$$

D'ailleurs, si nous ajoutons les équations (1) élevées au carré, nous

avons

$$G^2 = D'^2 + D^2 - 2DD' \cos \Delta,$$

en désignant par Δ la distance angulaire géocentrique $\widehat{SOL}$ du Soleil et de la Lune; ou, avec une approximation suffisante, à cause de la petitesse de Δ qui est de l'ordre de $(\mathcal{A} - \mathcal{A}')$, $(\mathcal{L} - \mathcal{L}')$,

$$G^2 = D'^2 + D^2 - 2DD' = (D' - D)^2 = D'^2 (1 - H)^2,$$

ou, enfin,

(9) $$g = 1 - H,$$

si nous posons

$$g = \frac{G}{D'}.$$

La *Connaissance des temps* donne directement $\mathcal{A}'$, $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{A}$, $\mathcal{L}$, mais elle ne donne pas directement D' et D, rapportés à une même unité de longueur. Désignons par ρ_0 le rayon équatorial de la Terre, par A le demi-grand axe de l'orbite terrestre et posons

(10) $$d' = \frac{D'}{A}, \quad \sin \varpi' = \frac{\rho_0}{A}, \quad \sin \varpi = \frac{\rho_0}{D}.$$

La *Connaissance des temps* donne la constante ϖ', parallaxe horizontale équatoriale moyenne du Soleil et les variables d', ϖ pour tous les jours de l'année à midi moyen de Paris. d' est la distance du Soleil à la Terre mesurée avec A, et ϖ est la parallaxe horizontale équatoriale de la Lune.

On tire des définitions (10)

(11) $$D' = \frac{d'}{\sin \varpi'} \cdot \rho_0, \quad D = \frac{1}{\sin \varpi} \cdot \rho_0, \quad H = \frac{\sin \varpi'}{d' \sin \varpi},$$

$$G = g \cdot \frac{d'}{\sin \varpi'} \cdot \rho_0.$$

La direction (a, p) de Oz est évidemment celle de l'axe commun aux cônes d'ombre et de pénombre portés par la Lune sur la Terre.

2° **Ouvertures des cônes d'ombre et de pénombre.** — Si nous désignons par r et r' les rayons des globes lunaire et solaire,

l'ouverture f de ces cônes est donnée par la formule évidente

$$\sin f = \frac{r' \pm r}{G} \begin{cases} + \text{ pénombre,} \\ - \text{ ombre.} \end{cases}$$

Posons

$$\frac{r}{\rho_0} = k, \quad \frac{r'}{A} = \sin h,$$

h sera le diamètre apparent moyen du Soleil, et nous aurons

$$\frac{r'}{\rho_0} = \frac{A}{\rho_0} \sin h = \frac{\sin h}{\sin \varpi'},$$

par suite,

$$(12) \qquad \sin f = \frac{(\sin h \pm k \sin \varpi')\,\rho_0}{G \sin \varpi'} = \frac{\sin h \pm k \sin \varpi'}{g d'};$$

en substituant aux constantes h, k, ϖ leurs valeurs numériques

$$h = 15'\,59'',788, \qquad k = 0,2725, \qquad \log \sin \varpi' = \bar{5},6186145,$$

on trouve

$$\log(\sin h + k \sin \varpi') = \bar{3},668.804,$$
$$\log(\sin h - k \sin \varpi') = \bar{3},666.903.$$

3° **Sommets des cônes d'ombre et de pénombre.** — La distance δ au centre de la Lune des sommets des cônes est donnée par la formule évidente

$$\delta = \frac{r}{\sin f}.$$

4° Prenons pour axes de coordonnées rectangulaires *(fig. 103)* :

Oz précédemment défini ;
Oy dirigé du côté du pôle nord P, dans le plan du cercle horaire PI de I ;
Ox du côté de l'est, de telle sorte que l'ascension droite de Ox est $90° + \alpha$ et celle de Oy est $180° + \alpha$.

Désignons l'arc IL par u et l'angle $\widehat{PIL}$ par v ; cet angle étant

compté à partir de IP, de gauche à droite pour le personnage fictif ayant les pieds en O et la tête en I.

Les coordonnées x, y, z sont données par les formules

$$(12)\quad \begin{cases} x = \mathrm{D}\sin u \sin v = \dfrac{\sin \mathfrak{L} \sin(\mathcal{A} - a)}{\sin \varpi}\cdot \rho_0, \\ y = \mathrm{D}\sin u \cos v = \dfrac{\sin p \cos \mathfrak{L} - \cos p \sin \mathfrak{L} \cos(\mathcal{A} - a)}{\sin \varpi}\cdot \rho_0, \\ z = \mathrm{D}\cos u \qquad\;\; = \dfrac{\cos p \cos \mathfrak{L} + \sin p \sin \mathfrak{L} \cos(\mathcal{A} - a)}{\sin \varpi}\cdot \rho_0. \end{cases}$$

Les coordonnées ξ, η, ζ d'un lieu terrestre M, de colatitude φ', de rayon $\rho = \mathrm{R}\rho_0$, sont, à l'époque sidérale θ de ce lieu,

$$(13)\quad \begin{cases} \xi = \mathrm{R}.\sin \varphi' \sin(\theta - a).\rho_0, \\ \eta = \mathrm{R}.[\sin p \cos \varphi' - \cos p \sin \varphi' \cos(\theta - a)].\rho_0, \\ \zeta = \mathrm{R}\,[\cos p \cos \varphi' + \sin p \sin \varphi' \cos(\theta - a)].\rho_0. \end{cases}$$

Les distances c au plan $x\mathrm{O}y$ des sommets des cônes d'ombre et de pénombre sont évidemment

$$(14)\qquad c = z \pm \frac{r}{\sin f} \begin{cases} + \text{ pénombre}, \\ - \text{ ombre}. \end{cases}$$

Le plan, mené par M parallèlement à $x\mathrm{O}y$, coupe les cônes suivant des cercles dont le rayon L est évidemment $(c - \zeta)\operatorname{tg} f$, et si M est sur l'un de ces cônes, sa distance $\mathrm{M_1L_1}$ à LS sera égale à ce rayon, c'est-à-dire qu'on aura

$$(15)\qquad (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = (c - \zeta)^2 \operatorname{tg}^2 f = \mathrm{L}^2,$$

relation fondamentale dans la théorie des éclipses.

Posons :

$$(16)\qquad \lambda = \operatorname{tg} f, \quad l = c\lambda, \quad \mathrm{L} = (l - \lambda\zeta), \quad \Lambda = \mathrm{M_1L_1}.$$

Désignons par σ l'angle de $\mathrm{M_1L_1}$ avec Oy, compté de gauche à droite, à partir de Oy nous aurons, à une époque quelconque, les équations

$$(17)\qquad \begin{cases} \Lambda \sin \sigma = x - \xi, \\ \Lambda \cos \sigma = y - \eta, \end{cases}$$

dont le système peut remplacer l'équation (15) lorsque $\Lambda = \mathrm{L}$.

5° $\mathcal{A}'$, $\mathfrak{D}'$, d', $\mathcal{A}$, $\mathfrak{D}$, ϖ sont des fonctions du temps moyen T de Paris, dont les valeurs sont données de jour en jour par la *Connaissance des temps*. Le temps sidéral θ du lieu M est aussi une fonction de T facile à former.

Soient :

θ_0 le temps sidéral de Paris correspondant à l'époque moyenne T_0:
$\mathfrak{L}$ la longitude de M comptée à l'ouest de Paris;
$T = T_0 + \tau$ une époque quelconque, temps moyen de Paris;

On aura à cette époque

$$\theta = \theta_0 + \mathfrak{L} + \left(\frac{d\theta}{dT}\right)\tau,$$

avec

$$\frac{d\theta}{dT} = 1^h 9^s, 86 = 3\,609,86,$$

si τ est exprimé en heures moyennes et θ en secondes sidérales.

Les formules précédentes permettent de calculer x, y, z, ξ, η, ζ et leurs différences; par suite, leurs dérivées x', y', z', ξ', η', ζ' relatives à T pour une époque déterminée, temps de Paris, soit T_0. Pour l'époque T, on aura les séries

$$x = x_0 + x'_0\tau + \ldots, \quad \xi = \xi_0 + \xi'_0\tau + \ldots, \quad x - \xi = (x_0 - \xi_0) + (x'_0 - \xi'_0)\tau + \ldots,$$
$$y = y_0 + y'_0\tau + \ldots, \quad \eta = \eta_0 + \eta'_0\tau + \ldots, \quad y - \eta = (y_0 - \eta_0) + (y'_0 - \eta'_0)\tau + \ldots.$$

Pour de petites valeurs de τ, on pourra borner les séries à leurs deux premiers termes, et si l'on pose

$$m \sin M = x_0 - \xi_0, \quad n \sin N = x'_0 - \xi'_0,$$
$$m \cos M = y_0 - \eta_0, \quad n \cos N = y'_0 - \eta'_0,$$

les équations (17) deviennent

$$(18) \quad \begin{cases} \Lambda \sin \sigma = m \sin M + n \sin N.\tau, \\ \Lambda \cos \sigma = m \cos M + n \cos N.\tau, \end{cases}$$

Les deux termes l, $\lambda\zeta$ de L sont calculables pour chaque époque T. On peut donc aussi mettre L sous la forme de série

$$(19) \quad L = L_0 + L'_0\tau + \ldots.$$

Le terme principal l de L varie très lentement et on peut borner

cette série à ses deux premiers termes et même à L_0 avec une approximation bien suffisante pour de petites valeurs de τ.

Supposons que T_0 soit l'époque de la conjonction du Soleil et de la Lune en ascension droite, ou une époque voisine, et cherchons l'époque T ou $T_0 + \tau$ à laquelle le point terrestre M traverse la surface d'un cône. On aura alors $\Lambda = L$, ou, dans une première approximation,

$$\Lambda = L_0, \tag{20}$$

et l'élimination de Λ entre (18) et (20) donnera, pour déterminer τ, l'équation du second degré

$$L_0^2 = m^2 + 2mn \cos(M - N).\tau + n^2\tau^2, \tag{21}$$

qui n'est autre chose que l'équation (15) après que ses divers termes sont exprimés en fonction de τ.

6° Au lieu de résoudre l'équation (21) par rapport à τ, il est préférable, sans être plus long, de résoudre les équations (18) après y avoir fait $\Lambda = L_0$: outre τ, on obtient ainsi σ qui est très utile dans la pratique.

Généralement, les équations (18) lient les trois quantités Λ, σ, τ et déterminent deux quelconques d'entre elles dès que la troisième est supposée connue. En supposant Λ connu, nous avons, pour calculer σ et τ, les formules

$$\left\{\begin{aligned} \Lambda \sin(\sigma - N) &= m \sin(M - N), \\ \Lambda \cos(\sigma - N) &= m \cos(M - N) + n\tau, \end{aligned}\right.$$

ou, en posant

$$\sigma - N = 90^\circ - \psi,$$

$$\left\{\begin{aligned} &\cos\psi = \frac{m}{\Lambda}\sin(M - N), \\ &\tau = -\frac{m}{n}\cos(M - N) + \frac{\Lambda}{n}\sin\psi = -\frac{m}{n}\,\frac{\cos(M - N + \psi)}{\cos\psi}. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

La première relation (22) donne pour ψ deux valeurs ψ' et $-\psi'$, en désignant par ψ' l'arc unique, compris entre 0 et $+\pi$, qui la vérifie.

Les valeurs correspondantes de τ et σ sont

$$(23)\qquad \begin{cases} \sigma = 90^\circ + \mathrm{N} \mp \psi', \\ \tau = -\dfrac{m}{n}\dfrac{\cos(\mathrm{M} - \mathrm{N} \pm \psi')}{\cos\psi'}. \end{cases}$$

Il importe de remarquer la signification astronomique de l'angle σ. C'est, par définition, l'angle de Oy avec le plan $\mathrm{MM_1L_1LS}$ dans lequel l'observateur M voit les centres de la Lune et du Soleil, suivant les directions ML, MS. Menons par le point O les rayons OL', OS' de la sphère géocentrique, parallèles à ces directions respectives. Les points S', L' seront les positions apparentes, reportées sur cette sphère, de S et L vus de M.

Le grand cercle L'S' passe par I puisque son plan est parallèle à LS ou OZ. Les petits arcs de grand cercle S's, L'L prolongés se coupent sur OM prolongé, en Z zénith géocentrique de M. L'angle en I des deux arcs IsL, IS'L' est de l'ordre de $\dfrac{\mathrm{LL'}}{\mathrm{LI}}$ ou de $\dfrac{\widehat{\mathrm{OLM}}}{\widehat{\mathrm{OLL_1}}}$ et peut atteindre une valeur très sensible, dans certains cas, par exemple lorsque $\mathrm{L_1}$ peut passer très près de O dans le cours de l'éclipse. Mais, dans tous les cas, l'angle σ est représenté, sur la sphère O, par l'angle $\widehat{\mathrm{PIL'}}$ qui diffère très peu de l'angle PS'L' parce que S', comme s, est toujours très rapproché de I à cause du grand éloignement du Soleil ou de la petitesse de l'angle $\widehat{\mathrm{OSL}} = \widehat{\mathrm{IO}s}$ qui est surtout marquée pendant une éclipse de Soleil. On a donc sensiblement

$$\sigma = \widehat{\mathrm{PS'L'}},$$

σ représente, à peu près, à une époque quelconque de l'éclipse, pour l'observateur M, l'angle de position du centre de la Lune par rapport au centre du Soleil, compté de gauche à droite sur le disque solaire, à partir du point nord de ce disque, point déterminé par le cercle horaire PS'.

Les points du disque solaire, touchés par le disque lunaire aux moments où l'observateur M traverse la surface du cône d'ombre ou de pénombre sont donc connus et définis par les valeurs correspondantes de σ. La Lune s'avançant de l'ouest à l'est sur le Soleil, le

premier contact a lieu à l'ouest pour une valeur de σ supérieure à 180°, et le deuxième contact a lieu à l'est pour une valeur de σ inférieure à 180°, quel que soit d'ailleurs le cône considéré, c'est-à-dire qu'il s'agisse d'une éclipse partielle, du cône de pénombre; ou d'une éclipse totale, du cône d'ombre pure. On prendra donc toujours, dans les formules (23),

le signe inférieur, pour le premier contact ou d'entrée ;
le signe supérieur, pour le deuxième contact ou de sortie.

Nous désignerons les valeurs correspondantes de σ, τ par σ_i, τ_i et σ_e, τ_e.

Si, dans la lunette astronomique qui retourne les objets, on désigne par P l'angle de position d'un contact, compté dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre, sur l'image du disque solaire, à partir de son point nord, on a toujours

$$P + \sigma = 180°,$$

quel que soit le contact, ou

$$P = 90° - N \mp \psi' \quad \begin{cases} - \text{ 1}^{\text{er}} \text{ contact,} \\ + \text{ 2}^{\text{e}} \text{ contact.} \end{cases}$$

On corrigera séparément les éléments σ_i, τ_i et σ_e, τ_e de chaque contact par une deuxième approximation, en prenant $T_0 + \tau_i$ pour le premier et $T_0 + \tau_e$ pour le deuxième au lieu de T_0 et recommençant la série des calculs précédents. Ajoutons qu'une troisième approximation est généralement superflue.

La moyenne des valeurs finales de τ_i, τ_e répond sensiblement à l'époque de la plus grande phase de l'éclipse.

Si, dans la première approximation, on avait

$$L_0 < m \sin (M - N),$$

ψ' ne serait pas réel et il n'y aurait probablement pas d'éclipse pour M. La moyenne τ_m des deux valeurs imaginaires conjuguées de τ est toujours réelle :

$$\tau_m = -\frac{m}{n} \cos (M - N),$$

et une deuxième approximation, en partant de $T_0 + \tau_m$ au lieu de T_0

est nécessaire pour décider s'il y a réellement éclipse ou simplement appulse, c'est-à-dire si le bord de la Lune passe seulement très près de celui du Soleil. Dans ce dernier cas, τ_m répond à l'époque de la plus courte distance des deux bords.

7° Nous avons dit que les valeurs numériques de x, y, ξ, η calculées pour des valeurs équidistantes de T, permettent de former leurs différences de divers ordres et, par suite, les valeurs numériques de leurs dérivées x', y', ξ', η'. Mais la faible variation de a, p permet de calculer plus simplement ξ', η' par les formules tirées de (13)

$$(24) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi' &= \rho_0 \mathrm{R}.\sin\varphi' \cos(\theta - a)\frac{d(\theta - a)}{d\mathrm{T}}, \\ \eta' &= \rho_0 \mathrm{R}\sin\varphi'.\cos p \sin(\theta - a)\frac{d(\theta - a)}{d\mathrm{T}}, \end{aligned} \right.$$

en donnant à a, p leurs valeurs à l'époque pour laquelle on veut ξ', η'.

OCCULTATION D'UNE ÉTOILE ✱ PAR LA LUNE ☾

Une étoile n'est autre chose qu'un soleil, de diamètre apparent nul, situé à une distance infinie de la Terre et dont la position est fixe sur la sphère céleste. Les formules d'occultation se déduisent donc des formules d'éclipse de Soleil, en y introduisant les valeurs particulières

$$h = 0, \quad \sin \varpi' = 0, \quad \mathcal{A}' = \mathcal{A}_{\ast}, \quad \mathcal{D}' = \mathcal{D}_{\ast}.$$

On a alors, en faisant $\rho_0 = 1$,

$$\mathrm{H} = 0, \quad a = \mathcal{A}_{\ast}, \quad p = \mathcal{D}_{\ast}, \quad g = 1, \quad f = 0,$$
$$\log k = \bar{1},43537$$

et, en adoptant la notation de la *Connaissance des temps,* mise entre parenthèses,

$$\left\{\begin{aligned} x &= (p) = \frac{\sin \mathcal{D}_{☾} \sin (\mathcal{A}_{☾} - \mathcal{A}_{\ast})}{\sin \varpi}, \\ y &= (q) = \frac{\sin \mathcal{D}_{\ast} \cos \mathcal{D}_{☾} - \cos \mathcal{D}_{\ast} \sin \mathcal{D}_{☾} \cos (\mathcal{A}_{☾} - \mathcal{A}_{\ast})}{\sin \varpi}, \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= (u) = \mathrm{R} \sin \varphi' \sin t, \\ \eta &= (v) = \mathrm{R} \sin \mathcal{D}_{\ast} \cos \varphi' - \mathrm{R} \cos \mathcal{D}_{\ast} \sin \varphi' \cos t, \end{aligned}\right.$$
$$t = 0 - \mathcal{A}_{\ast}.$$

La *Connaissance des temps* fournit, pour l'époque T_0 en temps moyen de Paris, les valeurs de (p_0), (q_0), (p'), (q') qui dépendent exclusivement des coordonnées de la Lune et de l'étoile à cette époque. Elle donne, en outre, l'angle horaire à Paris, t_0, de l'astre occulté pour l'époque T_0.

L'angle horaire t de cet astre, pour le lieu M, à l'époque de l'occultation, peut, dans une première approximation, être pris

égal à

$$t = t_0 + \mathfrak{L},$$

et, par suite, les formules

$$\left\{\begin{aligned} \xi_0 &= (u_0) = \mathrm{R} \sin \varphi' \sin (t_0 + \mathfrak{L}) \\ \eta_0 &= (v_0) = \mathrm{R} \cos \varphi' \sin \mathfrak{L}_\star - \mathrm{R} \sin \varphi' \cos \mathfrak{L}_\star \cos (t_0 + \mathfrak{L}), \\ \xi'_0 &= (u') = \mathrm{R} \sin \varphi' \cos (t_0 + \mathfrak{L}) \cdot \frac{d\theta}{d\mathrm{T}}, \\ \eta'_0 &= (v') = \mathrm{R} \sin \varphi' \cos \mathfrak{L}_\star \sin (t_0 + \mathfrak{L}) \cdot \frac{d\theta}{d\mathrm{T}}, \end{aligned}\right.$$

$$\log \frac{d\theta}{d\mathrm{T}} = \log 3609{,}86 \times 15 \times \sin 1'' = \bar{1}{,}41916,$$

permettent d'obtenir facilement les valeurs de (u), (v) au temps du lieu $\mathrm{T}_0 + \mathfrak{L}$, et avec une exactitude suffisante celles de leurs variations horaires (u') et (v').

En posant

$$\left\{\begin{aligned} &(p_0) - (u_0) = m \sin \mathrm{M}, && (p') - (u') = n \sin \mathrm{N}, \\ &(q_0) - (v_0) = m \cos \mathrm{M}, && (q') - (v') = n \cos \mathrm{N}, \\ &\cos \psi = \frac{m}{k} \sin (\mathrm{M} - \mathrm{N}), && \log k = \bar{1}{,}43609, \end{aligned}\right.$$

on obtiendra aisément les quantités m, M, n, N, ψ. Les auxiliaires m, n étant toujours prises positivement, les angles M, N sont complètement déterminés. L'angle ψ doit toujours être pris entre 0 et + 180°.

Les formules

$$\left\{\begin{aligned} \tau_i &= -\frac{m}{n} \frac{\cos (\mathrm{M} - \mathrm{N} - \psi)}{\cos \psi} && \text{pour l'immersion,} \\ \tau_e &= -\frac{m}{n} \frac{\cos (\mathrm{M} - \mathrm{N} + \psi)}{\cos \psi} && \text{pour l'émersion,} \end{aligned}\right.$$

dans lesquelles τ_i, τ_e sont exprimés en fraction d'heure moyenne, donnent en temps moyen du lieu, comme première approximation, les époques de l'immersion $\mathfrak{T}_i$ et de l'émersion $\mathfrak{T}_e$

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{T}_i &= \mathrm{T}_0 + \mathfrak{L} + \tau_i, \\ \mathfrak{T}_e &= \mathrm{T}_0 + \mathfrak{L} + \tau_e. \end{aligned}\right.$$

égal à

$$t = t_0 + \mathfrak{L},$$

et, par suite, les formules

$$\left\{\begin{aligned} \xi_0 &= (u_0) = \text{R} \sin \varphi' \sin (t_0 + \mathfrak{L}) \\ \eta_0 &= (v_0) = \text{R} \cos \varphi' \sin \mathfrak{L}_\star - \text{R} \sin \varphi' \cos \mathfrak{L}_\star \cos (t_0 + \mathfrak{L}), \\ \xi'_0 &= (u') = \text{R} \sin \varphi' \cos (t_0 + \mathfrak{L}) \cdot \frac{d\theta}{d\text{T}}, \\ \eta'_0 &= (v') = \text{R} \sin \varphi' \cos \mathfrak{L}_\star \sin (t_0 + \mathfrak{L}) \cdot \frac{d\theta}{d\text{T}}, \end{aligned}\right.$$

$$\log \frac{d\theta}{d\text{T}} = \log 3609{,}86 \times 15 \times \sin 1'' = \bar{1}{,}41916,$$

permettent d'obtenir facilement les valeurs de (u), (v) au temps du lieu $\text{T}_0 + \mathfrak{L}$, et avec une exactitude suffisante celles de leurs variations horaires (u') et (v').

En posant

$$\left\{\begin{aligned} &(p_0) - (u_0) = m \sin \text{M}, && (p') - (u') = n \sin \text{N}, \\ &(q_0) - (v_0) = m \cos \text{M}, && (q') - (v') = n \cos \text{N}, \\ &\cos \psi = \frac{m}{k} \sin (\text{M} - \text{N}), && \log k = \bar{1}{,}43609, \end{aligned}\right.$$

on obtiendra aisément les quantités m, M, n, N, ψ. Les auxiliaires m, n étant toujours prises positivement, les angles M, N sont complètement déterminés. L'angle ψ doit toujours être pris entre 0 et + 180°.

Les formules

$$\left\{\begin{aligned} \tau_i &= -\frac{m}{n} \frac{\cos (\text{M} - \text{N} - \psi)}{\cos \psi} \quad \text{pour l'immersion,} \\ \tau_e &= -\frac{m}{n} \frac{\cos (\text{M} - \text{N} + \psi)}{\cos \psi} \quad \text{pour l'émersion,} \end{aligned}\right.$$

dans lesquelles τ_i, τ_e sont exprimés en fraction d'heure moyenne, donnent en temps moyen du lieu, comme première approximation, les époques de l'immersion $\mathfrak{T}_i$ et de l'émersion $\mathfrak{T}_e$

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{T}_i &= \text{T}_0 + \mathfrak{L} + \tau_i, \\ \mathfrak{T}_e &= \text{T}_0 + \mathfrak{L} + \tau_e. \end{aligned}\right.$$

Si l'on voulait obtenir une plus grande précision dans le résultat, il faudrait recommencer le calcul en déterminant séparément, pour les époques de la rentrée et de la sortie, les quantités (p), (q)...

Pour l'émersion, par exemple, on calculera

$$(p) = (p_0) + (p')\,\tau_e,$$
$$(q) = (q_0) + (q')\,\tau_e,$$

le nouvel angle horaire

$$t' = t + \tau_e \cdot \frac{d\theta}{dT} \cdot 15^\circ. = t + \tau_e \cdot \frac{d\theta}{dT} \cdot 15.3600'',$$

....

et ainsi de suite.

Enfin, P et σ désignant, sur le petit disque stellaire, les mêmes quantités que sur le disque solaire dans les éclipses de Soleil, et P' étant l'angle de position d'un contact compté sur l'image de la Lune comme précédemment P sur celle du Soleil, on a les relations évidentes

$$P + \sigma = 180^\circ, \qquad P' - P = 180^\circ,$$

d'où

$$P' = 360^\circ - \sigma = \begin{cases} 270^\circ - N - \psi & \text{immersion,} \\ 270^\circ - N + \psi & \text{émersion.} \end{cases}$$

149e Exercice.

Calculer l'effet d'un petit déplacement de l'observateur sur les époques d'immersion ou d'émersion d'une étoile occultée par la Lune.

Solution : L'équation générale d'une occultation est (voir *Connaissance des temps*) :

$$(1)\quad [(p - u) + (p' - u')\,\tau]^2 + [(q - v) + (q' - v')\,\tau]^2 = k^2,$$

où p, q, p', q', sont des fonctions du temps de Paris calculées pour une époque T connue ; u, v, u', v' des fonctions de la position r, $\mathfrak{L}$, φ de l'observateur à la surface de la Terre ; τ la correction de T, telle que $T + \tau$ soit l'heure, en temps de Paris, de l'immersion ou de l'émersion.

τ est donc une fonction de $\mathfrak{L}$, φ et si les coordonnées de l'observateur varient de $d\mathfrak{L}$, $d\varphi$, τ variera de $d\tau$. En différentiant l'équation (1), on a la relation

$$(2)\quad \mathrm{P}[(p'-u')\,d\tau - du - \tau du'] + \mathrm{Q}\,[(q'-v')\,d\tau - dv - \tau dv'] = 0,$$

en posant

$$(3)\quad \mathrm{P} = (p-u) + (p'-u')\,\tau, \quad \mathrm{Q} = (q-v) + (q'-v')\,\tau.$$

Si T est l'époque exacte, obtenue par un calcul préalable, de l'immersion ou de l'émersion, on aura $\tau = 0$ et les équations (3) et (2) deviendront

$$(4)\qquad \mathrm{P} = p - u, \quad \mathrm{Q} = q - v,$$

$$(5)\qquad d\tau = \frac{\mathrm{P}\,du + \mathrm{Q}\,dv}{\mathrm{P}\,(p'-u') + \mathrm{Q}\,(q'-v')},$$

d'ailleurs, on a

$$(6)\quad \begin{cases} du = \dfrac{1}{\lambda}\,u'\;d\mathfrak{L} - r\sin\varphi'\,\sin h\,.\,d\varphi' \\[2ex] dv = \dfrac{1}{\lambda}\,v'\;d\mathfrak{L} + r\,(\cos\varphi'\cos\mathfrak{D} + \sin\varphi'\sin\mathfrak{D}\cos h)\,d\varphi', \end{cases}$$

en supposant $d\mathfrak{L}$ et $d\varphi'$ assez petits pour que dr soit négligeable.

Si le déplacement de l'observateur est l et f dans les sens respectifs de la longitude et de la latitude, on aura sensiblement

$$r\cos\varphi'\,.\,d\mathfrak{L} = l, \quad r\,d\varphi' = f,$$

et, par suite,

$$(7)\quad \begin{cases} du = l\cos h - f\sin\varphi'\sin h, \\ dv = l\sin\mathfrak{D}\sin h + f\,(\cos\varphi'\cos\mathfrak{D} + \sin\varphi'\sin\mathfrak{D}\cos h). \end{cases}$$

l et f sont exprimés en rayons terrestres équatoriaux et $d\tau$ en heures moyennes.

Les formules (4), (5) et (6) ou (7) résolvent la question.

FIN DES EXERCICES ASTRONOMIQUES.

TABLE DES MATIÈRES

LIVRE IV

LIVRE V

Bordeaux. — Imp. G. Gounouilhou, rue Guiraude, 11.

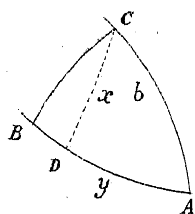


Fig. 1.

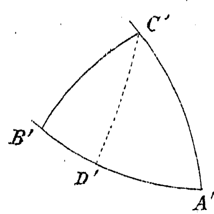


Fig. 2.

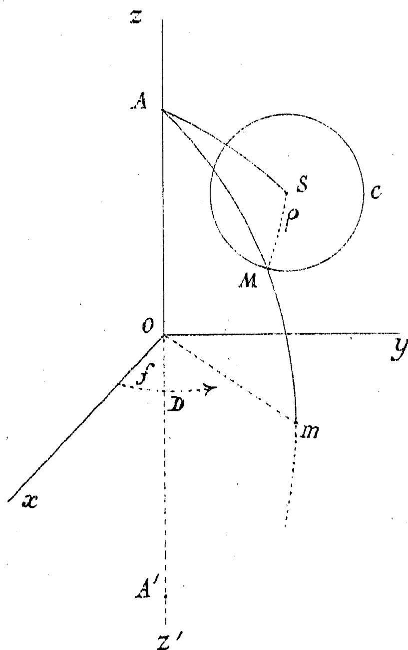


Fig. 3.

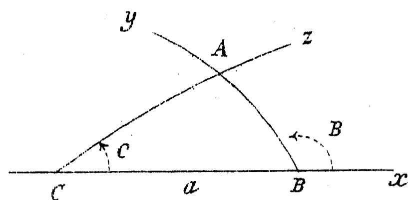
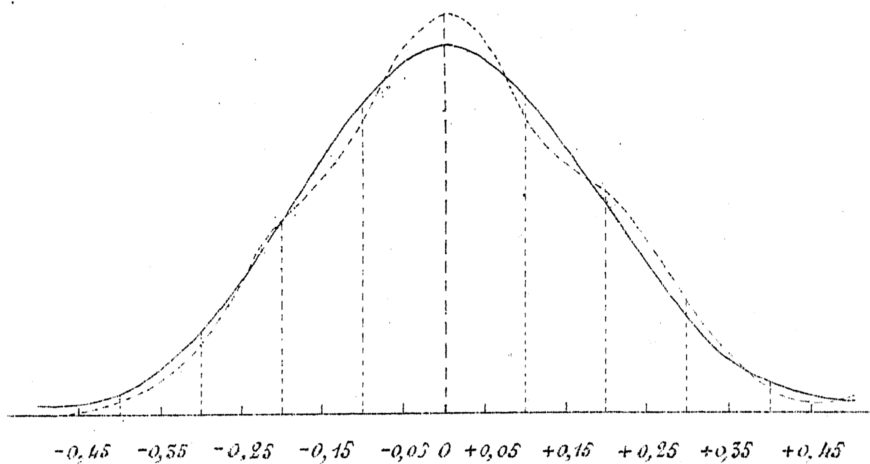


Fig. 4.



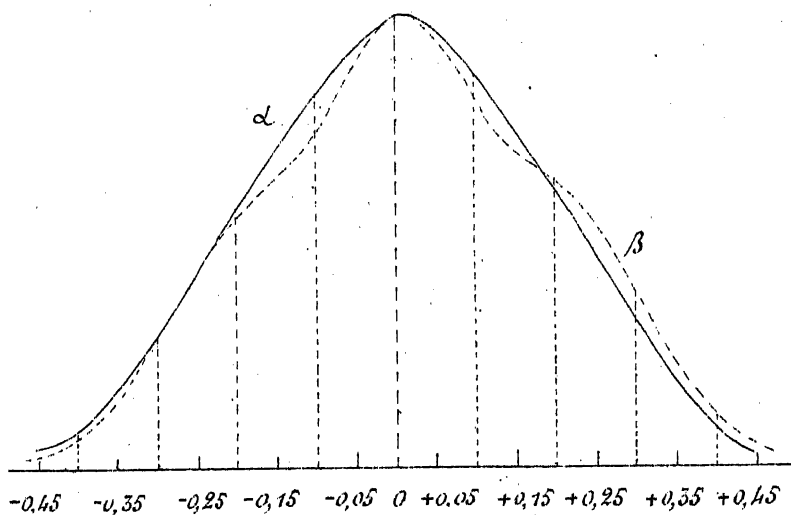

α
β
-0,45
-0,35
-0,25
-0,15
-0,05
0
+0,05
+0,15
+0,25
+0,35
+0,45

Fig. 6.

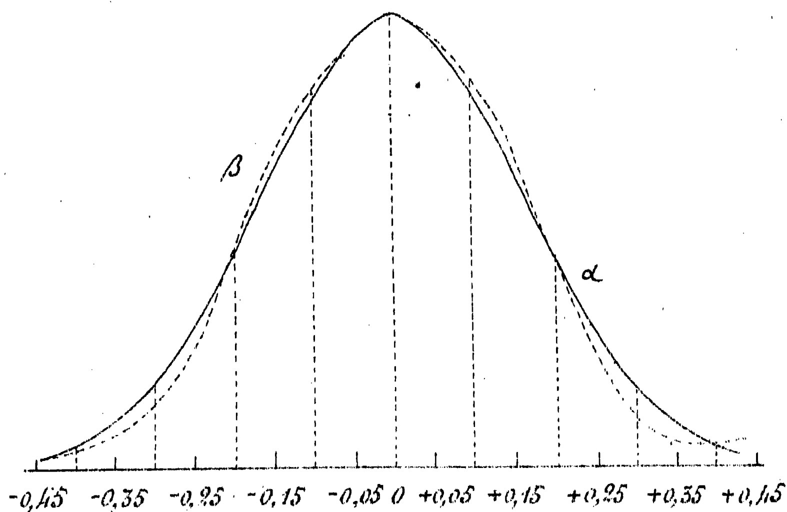
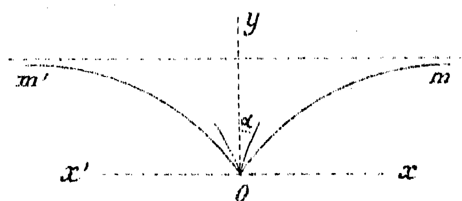

β
α
-0,45
-0,35
-0,25
-0,15
-0,05
0
+0,05
+0,15
+0,25
+0,35
+0,45

Fig. 7.


y
m'
m
α
x'
x
O

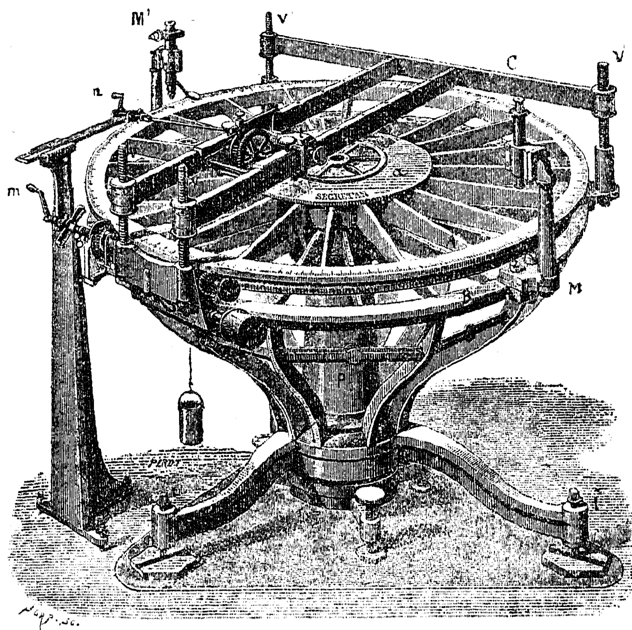


Fig. 9.

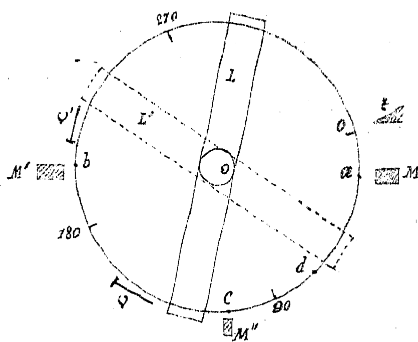


Fig. 10.

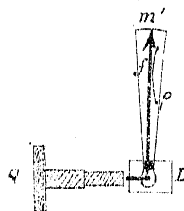


Fig. 11.

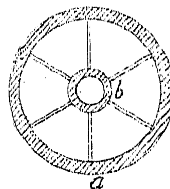
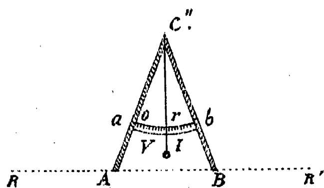


Fig. 12.



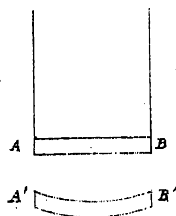
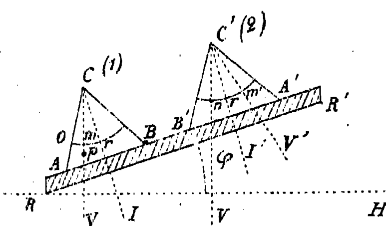


Fig. 14



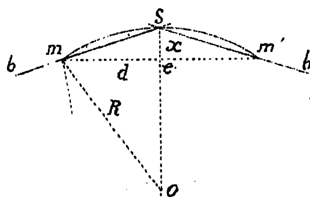
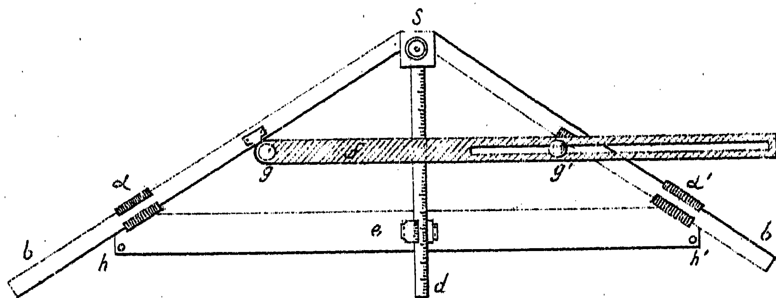
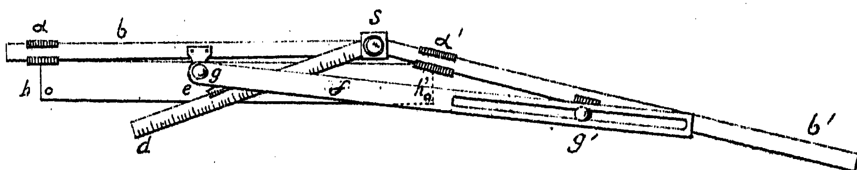


Fig. 13.

Fig. 15.





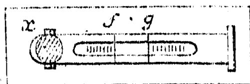


Fig. 17.

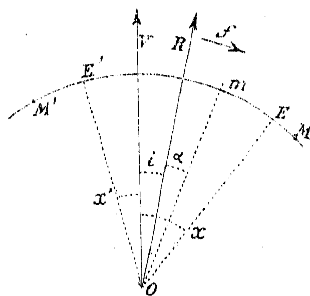


Fig. 18.

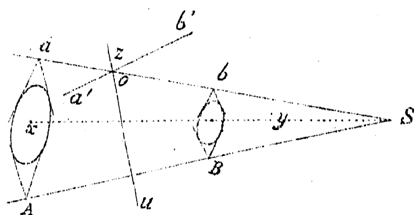


Fig. 19.

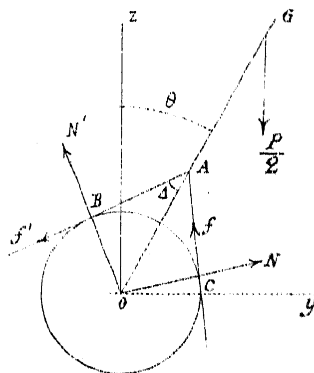


Fig. 20.

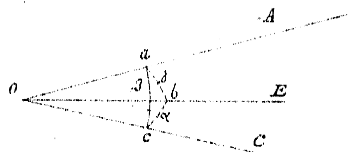


Fig. 21.

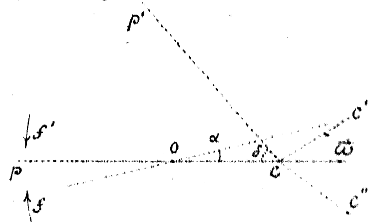
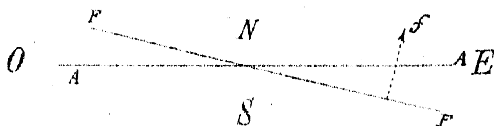
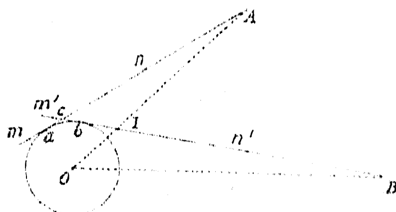


Fig. 23.







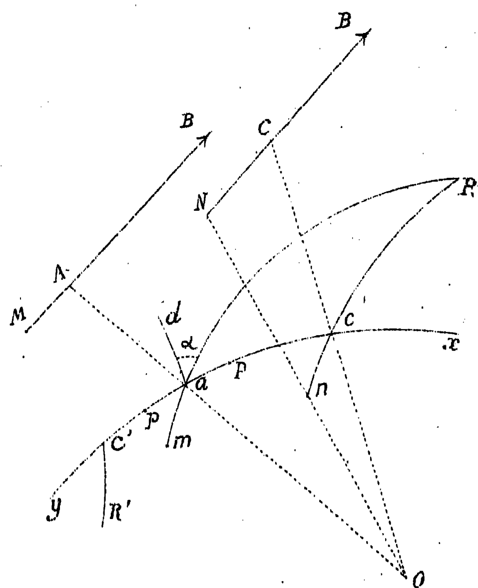


Fig. 25.

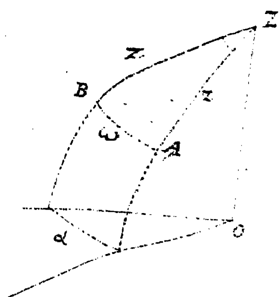


Fig. 26.

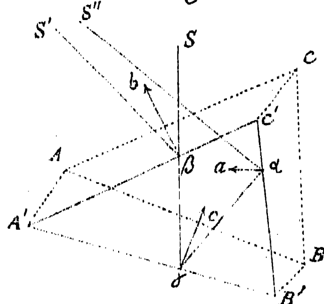


Fig. 27.

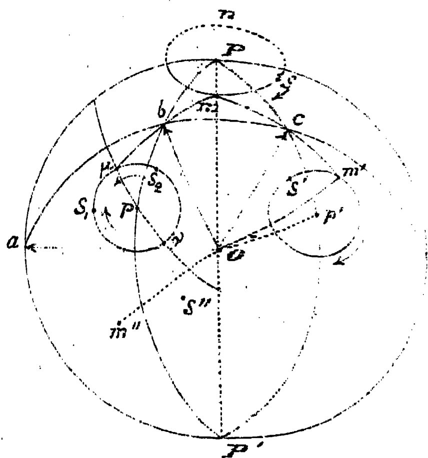


Fig. 28.

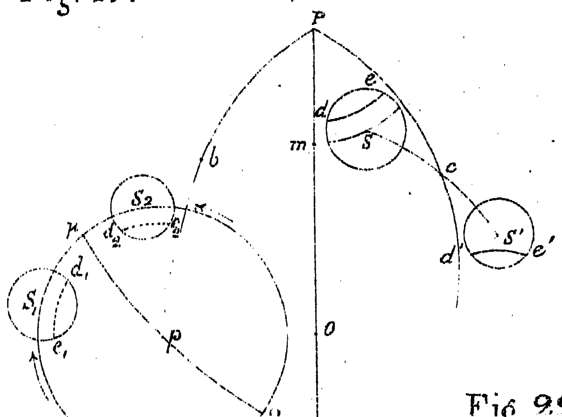


Fig. 29.

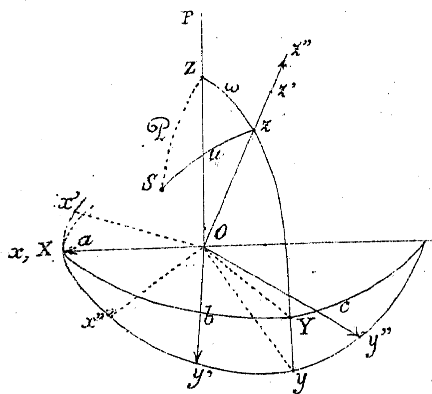


Fig. 30.

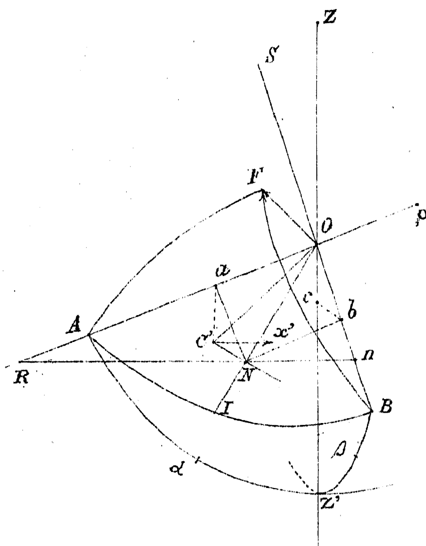


Fig. 33.

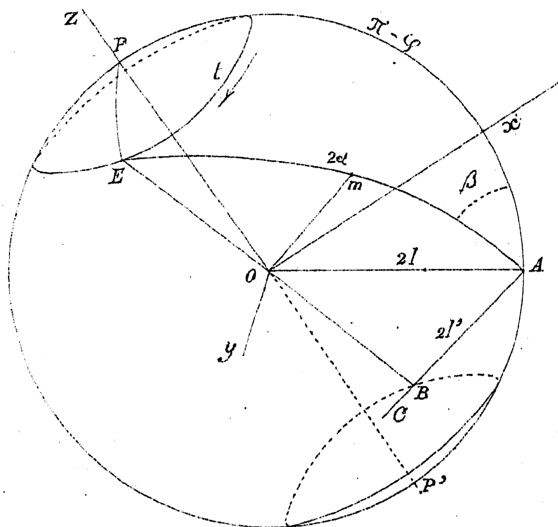


Fig. 31.

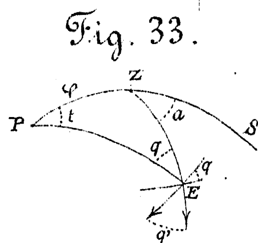


Fig. 34.

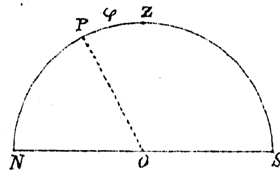
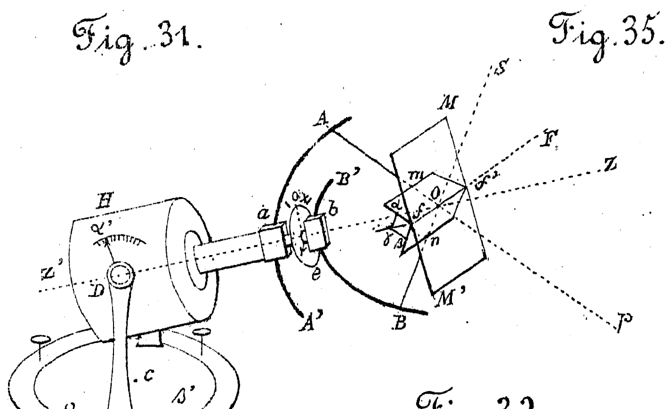


Fig. 35.



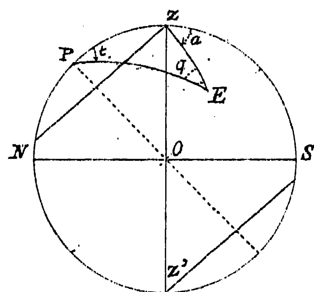


Fig. 36.

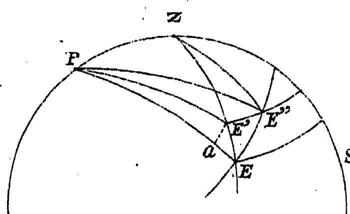


Fig. 37.

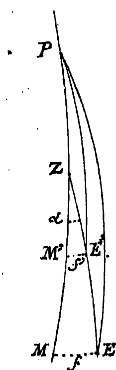


Fig. 38.

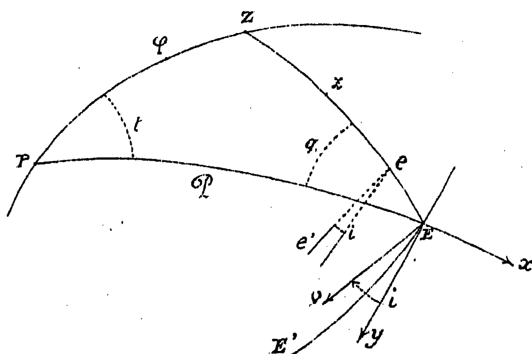
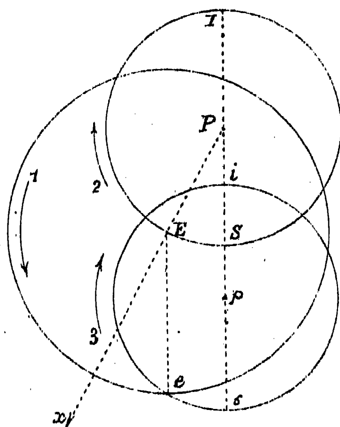
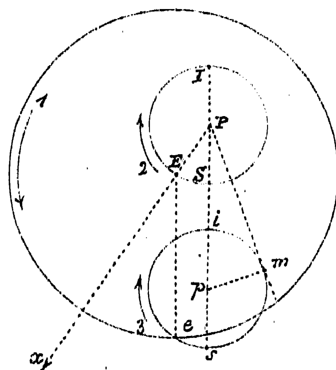


Fig. 39.





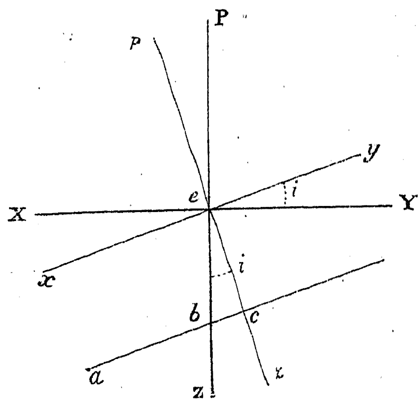


Fig. 42.

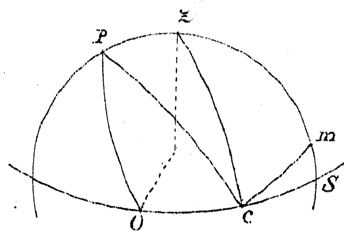


Fig. 43.

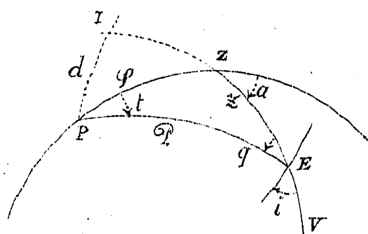


Fig. 44.

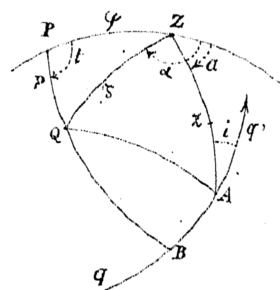


Fig. 45.

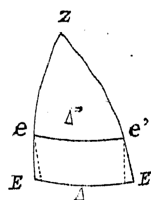


Fig. 46

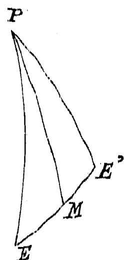


Fig. 47.

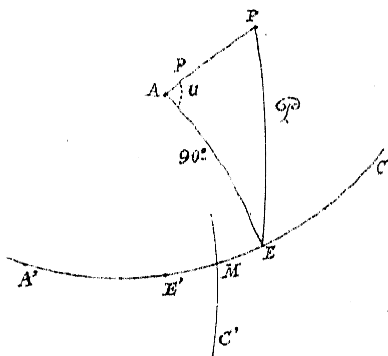
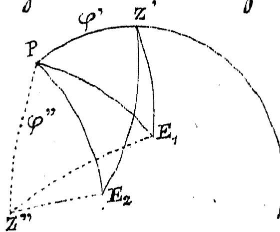
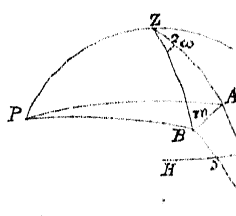
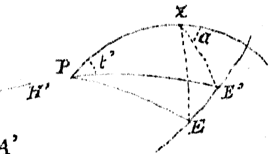


Fig. 48.







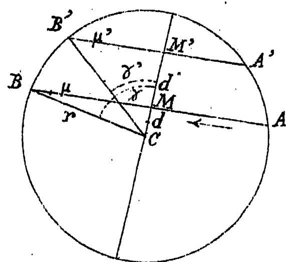


Fig. 51.

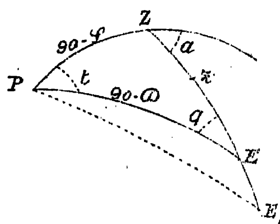


Fig. 52.

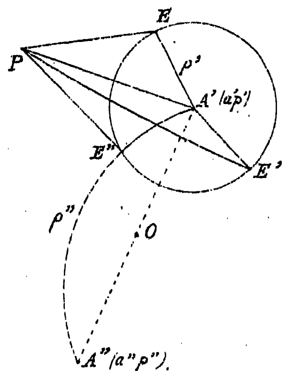


Fig. 53.

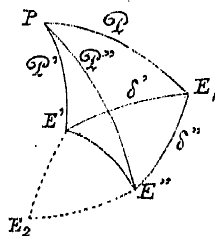


Fig. 54.

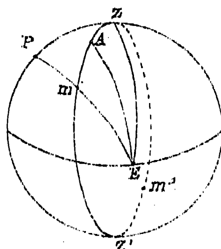


Fig. 55.

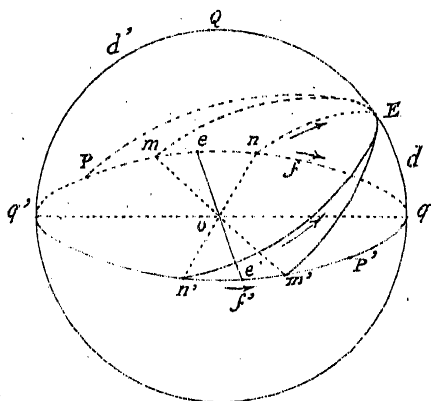


Fig. 56.

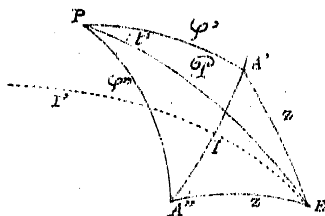
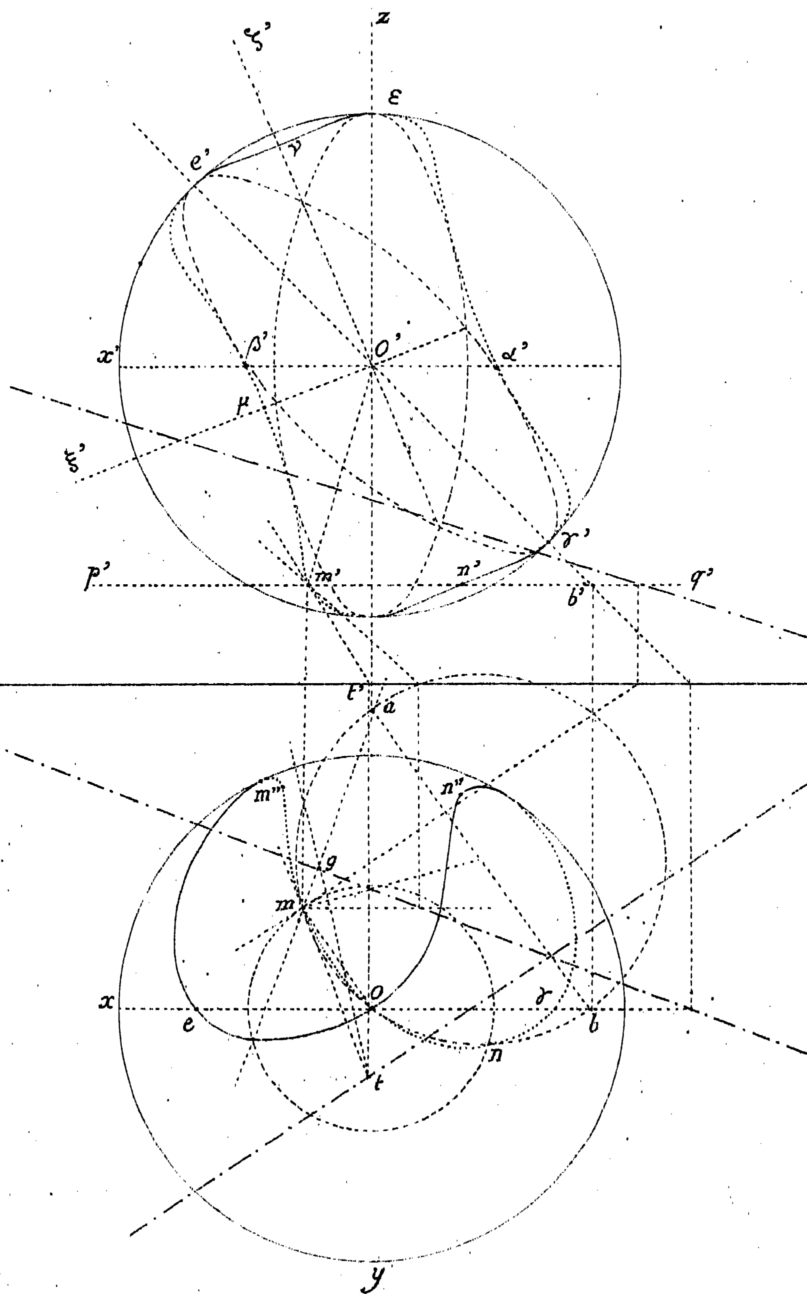


Fig. 57.

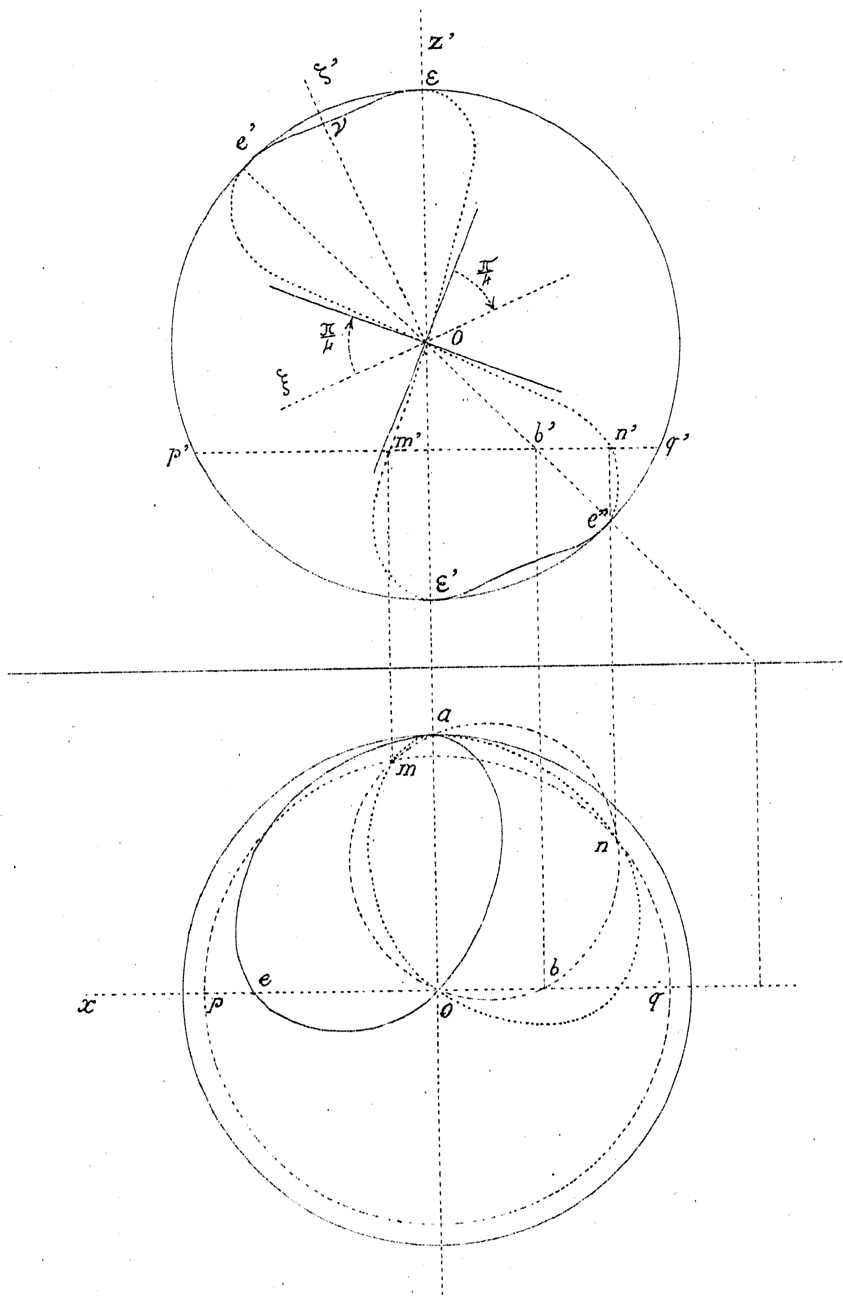
Fig. 58.

Fig. 59.

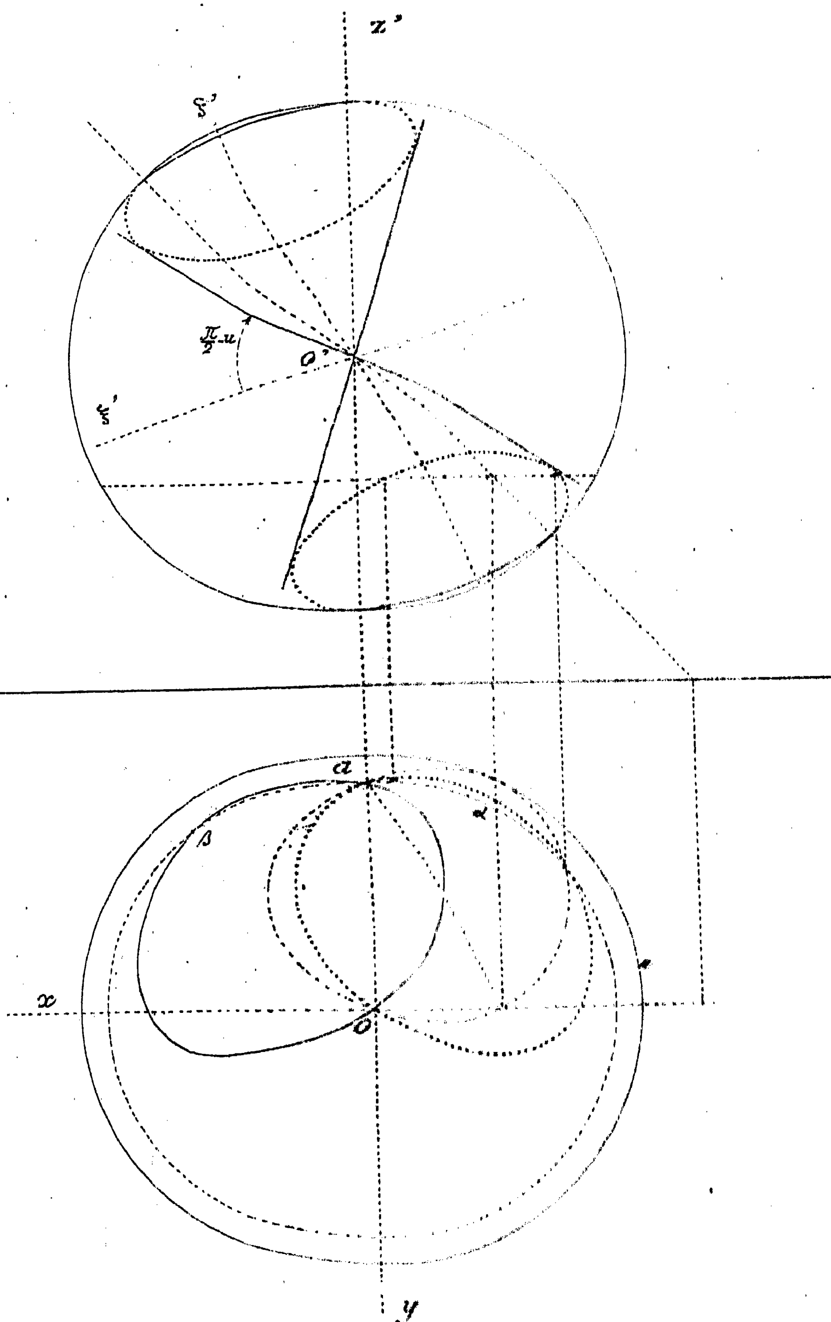
1.er Cas. $\sin.^2 a < \sin.^2 \mathfrak{P}.$

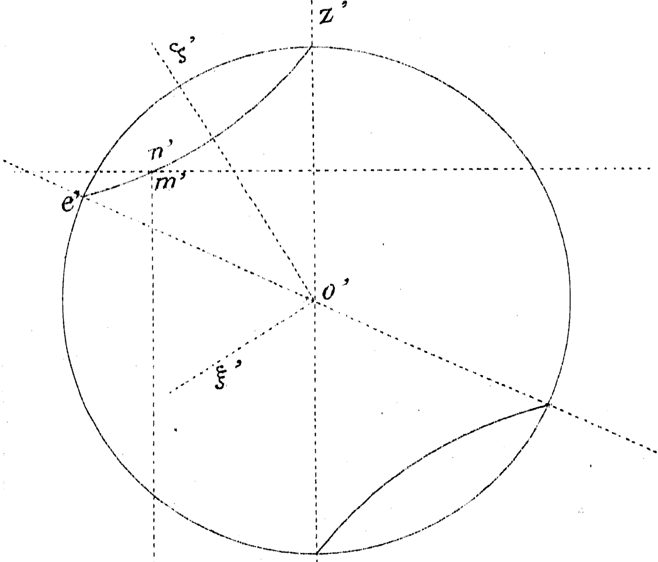


2.^{e} Cas. $\sin^2 a = \sin.^2 \mathcal{P}$



3.ᵉ Cas. $\sin^2 a > \sin^2 \varphi$.





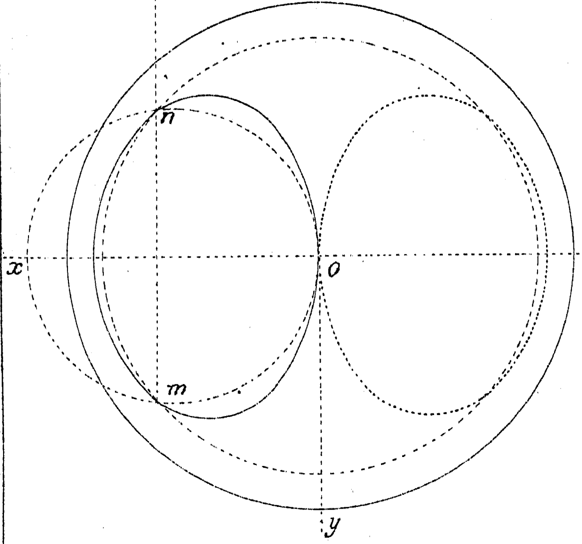
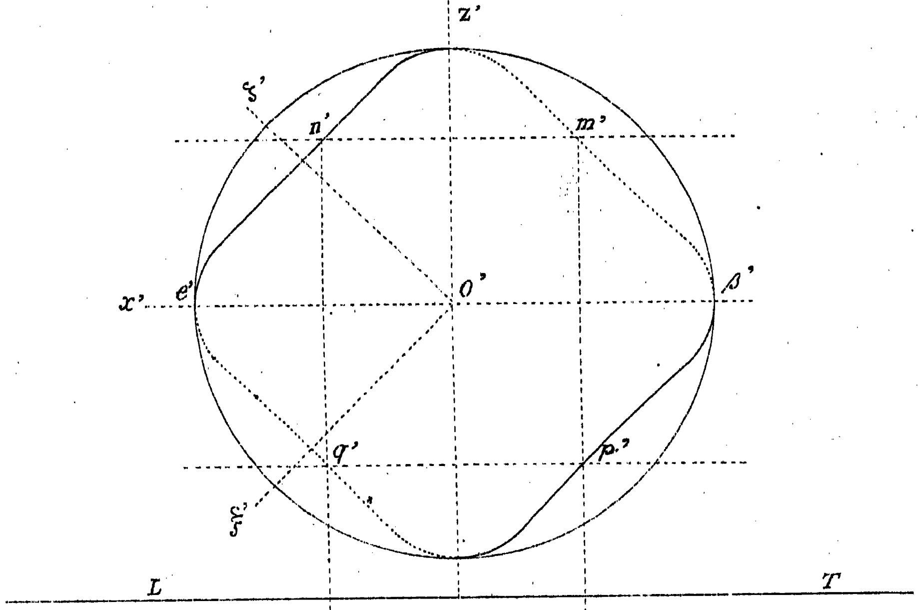


Fig. 64.



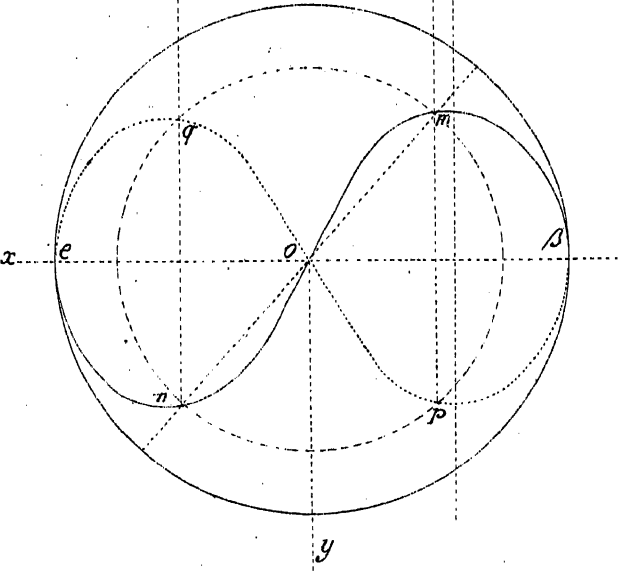


Fig. 63.

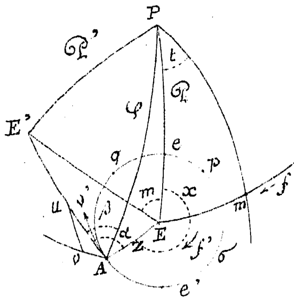


Fig. 65.

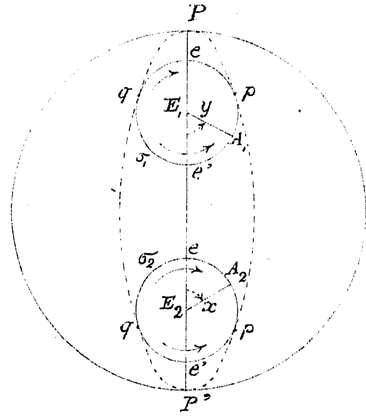


Fig. 66.

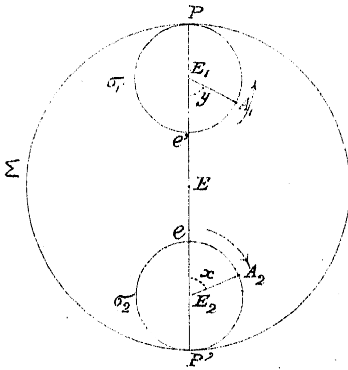


Fig. 67.

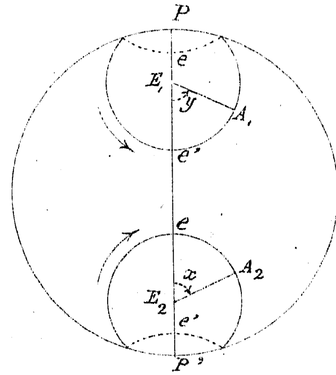
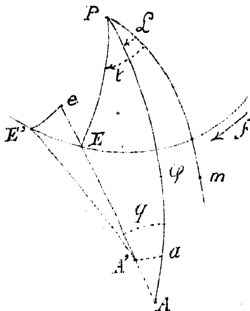
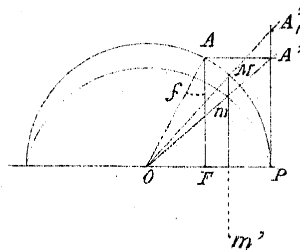
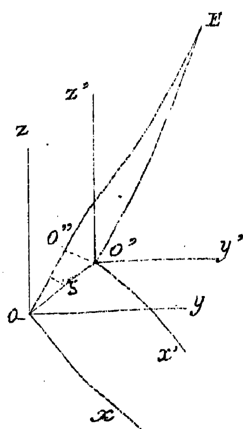


Fig. 68.







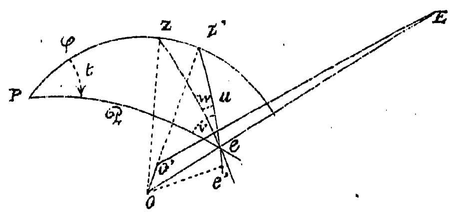
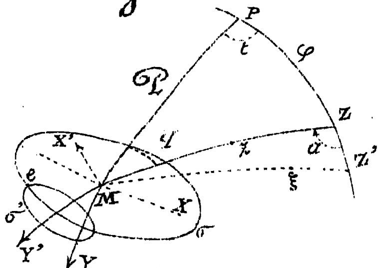


Fig. 72.

Fig. 71.



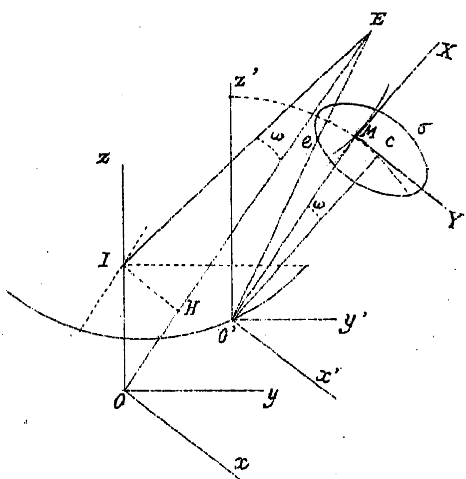


Fig. 74.

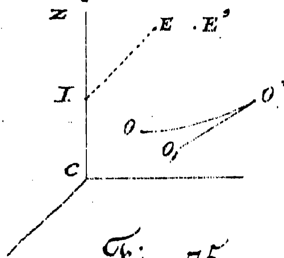
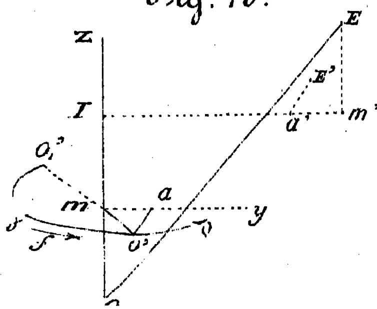


Fig. 73.

Fig. 75.



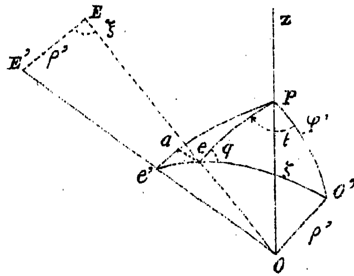
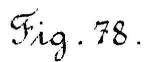
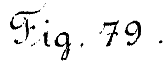
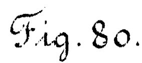
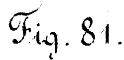


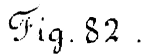
Fig 77.

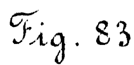

Fig. 78.

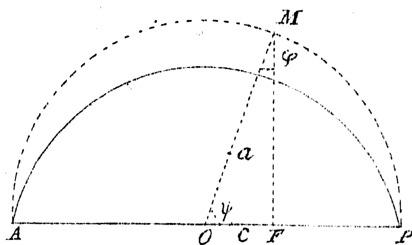

Fig. 79.


Fig. 80.


Fig. 81.


Fig. 82.


Fig. 83



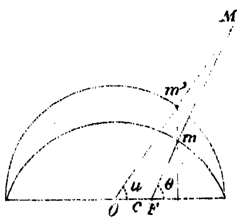


Fig. 86.

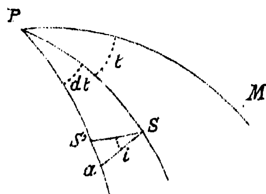


Fig. 87.

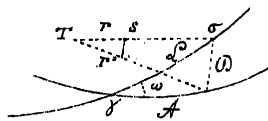


Fig. 88.

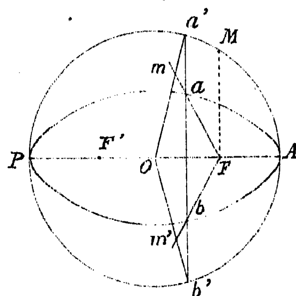


Fig. 89.

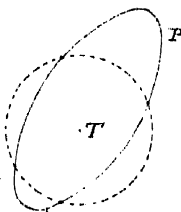


Fig. 90.

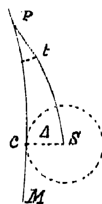


Fig. 91.

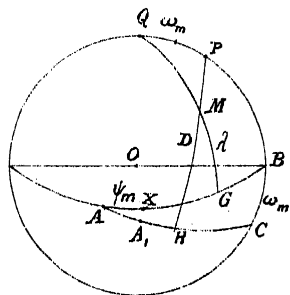


Fig. 92.

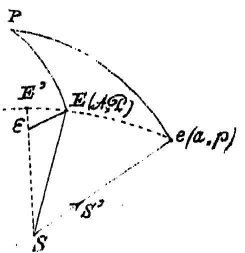


Fig. 93.

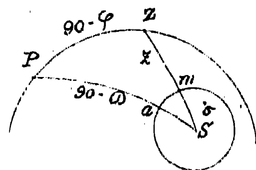
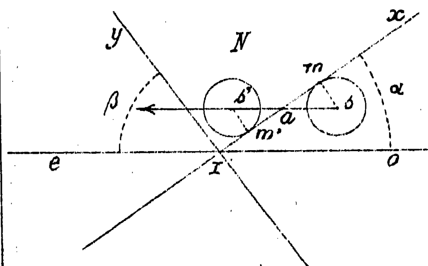
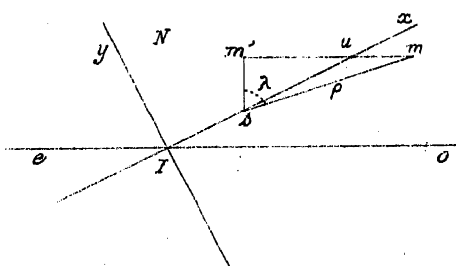


Fig. 94.





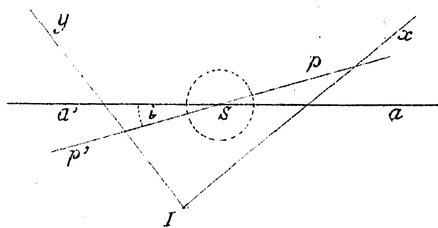


Fig. 97.

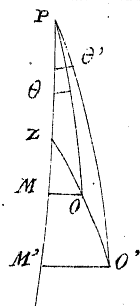


Fig. 101.

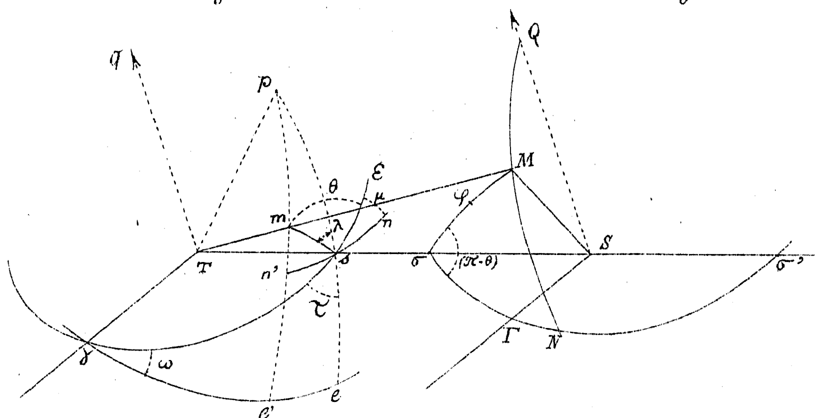


Fig. 98.

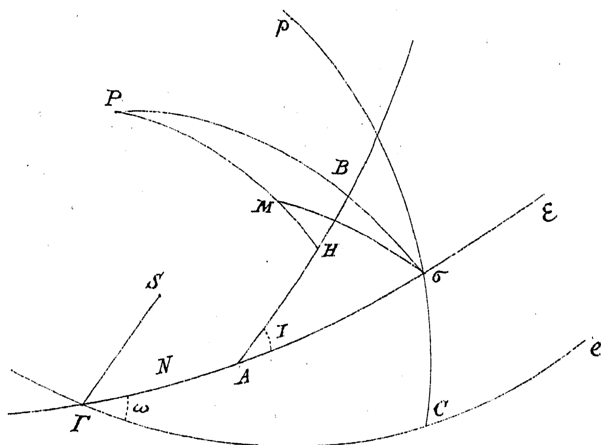


Fig. 99.

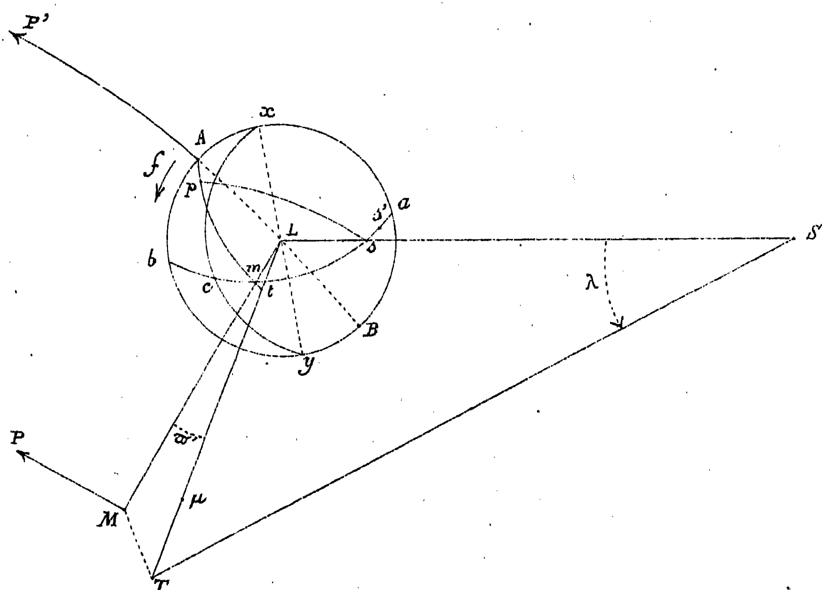


Fig. 100.

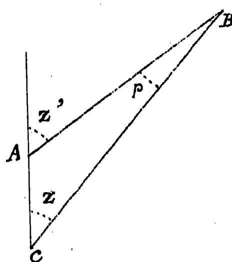


Fig. 102.

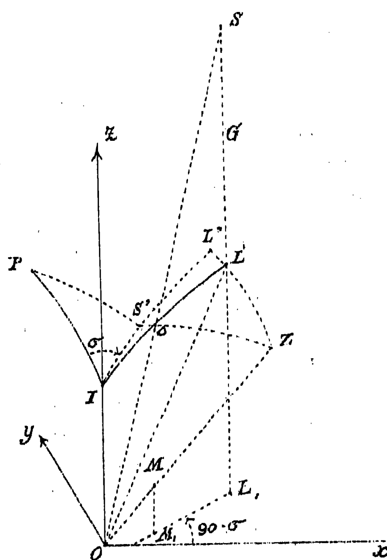


Fig. 103.